Summierbare Familien und assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologien

Peter Dierolf

1976

Summierbare Familien und assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologien

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades

des Fachbereichs Mathematik der

Ludwig - Maximilians - Universität München

vorgelegt von

Peter Dierolf

am 2. Dezember 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Professor Dr. J. Batt

2. Berichterstatter: Professor Dr. W. Roelcke

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Mai 1976

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Übersicht II

Kapitel I: Summierbare Familien

§ 1 Summierbare Familien und die CAUCHY-Bedingung 1

§ 2 Der Spezialfall I = $\mathbb{N}$; summierbare Folgen 20

§ 3 Summen - Vollständigkeit 23

Kapitel II: Der Satz von ORLICZ-PETTIS

§ 4 Sätze von ORLICZ-PETTIS-Typ für lokalkonvexe Räume 36

§ 5 Polare Gruppentopologien vom abzählbaren Typ und ORLICZ-PETTIS-Sätze 51

Kapitel III: Assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologien

§ 6 ORLICZ-PETTIS-Paare 61

§ 7 Die assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie (OP-Topologie) 66

§ 8 Darstellung der assoziierten OP-Topologie als verallgemeinerter induktiver Limes 73

§ 9 Lokalisierung der assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie 80

Kapitel IV: Vergleich der assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie mit anderen Topologien

§ 10 Vorbemerkung über spezielle Funktoren 91

§ 11 Die assoziierte Folgen-Topologie 99

§ 12 Die assoziierte ultrabornologische Topologie 104

§ 13 Die assoziierte strikte MACKEY-Topologie und verwandte Konstruktionen 110

§ 14 Verallgemeinerung der in § 8 durchgeführten Konstruktion; Eigenschaften vom Typ "lokaltopologisch". 111

§ 15 Einige Gegenbeispiele und ein Übersichtsschema 120

Liste der verwendeten Symbole 126

Literaturverzeichnis 130

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555611_0096

Einleitung und Übersicht

Im Jahre 1929 bewies ORLICZ [92, p. 244, Satz 2] den folgenden Satz:

> In jedem schwach Folgen-vollständigen BANACH-Raum $(E,\|\cdot\|)$ besitzen die schwache Topologie $\sigma(E,E')$ und die $\|\cdot\|$-Topologie die gleichen unbedingt konvergenten Reihen.

PETTIS [95, p. 281] zeigte, daß dieser Satz auch ohne die Voraussetzung "schwach Folgen-vollständig" richtig ist, wenn man "unbedingt konvergent" durch "Teilreihen-konvergent" ersetzt (vgl. auch BANACH [10, p. 240] , DUNFORD [49, p. 321]). Er verwendete dieses Resultat zum Beweis des folgenden Satzes:

> Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra, $(E,\|\cdot\|)$ ein BANACH-Raum und $m:\mathfrak{A}\longrightarrow E$ eine additive Mengenfunktion, so ist $m:\mathfrak{A}\longrightarrow(E,\|\cdot\|)$ genau dann σ-additiv, wenn $m:\mathfrak{A}\longrightarrow(E,\sigma(E,E'))$ σ-additiv ist.

Diese und andere Anwendungen des Satzes von ORLICZ-PETTIS in der Theorie der Vektormaße und in der Darstellungstheorie von Operatoren haben dazu geführt, daß zum Satz von ORLICZ-PETTIS in den letzten Jahren viele neue Ergebnisse und auch neue Anwendungen gefunden wurden. Bei BATT [13, p. 173] wird z.B. der Satz von ORLICZ-PETTIS zum Beweis der schwachen Kompaktheit gewisser nichtlinearer Abbildungen $T: C(K)\longrightarrow E$ verwendet. THOMAS [122, p. 102] charakterisiert mit Hilfe eines Satzes vom ORLICZ-PETTIS-Typ die Fortsetzbarkeit vektorwertiger RADON-Maße. Als weitere Beispiele seien hier noch die Arbeiten von ANDERSEN, CHRISTENSEN [4] , BATT [11, 12, 14], DIESTEL, FAIRES [39] , DREWNOWSKI [40 - 44] , HOFFMANN-JØRGENSEN [64] , KALTON [70 - 75] , LABUDA [84 - 88] , PEŁCZYŃSKI [94] , ROBERTSON [103, 104] , THOMAS [120, 121, 123, 124] genannt.

Es erscheint daher wünschenswert, möglichst optimale Sätze vom ORLICZ-PETTIS-Typ zur Verfügung zu haben. Eine lokalkonvexe Version des Satzes von ORLICZ-PETTIS lautet:

> Für jedes duale Paar $\langle E,F\rangle$ haben die schwache Topologie $\sigma(E,F)$ und die MACKEY-Topologie $\tau(E,F)$ die gleichen Teilreihen-konvergenten Reihen (vgl. McARTHUR [7, p. 297]).

Der Begriff der Teilreihen-Konvergenz hängt also nur vom dualen Paar ab. Zur Verschärfung dieser Aussage versucht man $\sigma(E,F)$ durch eine gröbere Topologie (DIESTEL, FAIRES [39, p. 255] , HOFFMANN-JØRGENSEN [64, p. 11] , THOMAS [123, p. 11]) und / oder $\tau(E,F)$ durch eine feinere Topologie (TWEDDLE [129, p. 487/488, Th. 6, Th. 7]) zu ersetzen.

Im allgemeinen gibt es zu einem topologischen linearen Raum $(E,\mathcal{R}$ keine gröbste lineare Topologie, die die gleichen Teilreihen-konver-

genten Reihen wie $\mathcal{R}$ besitzt.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß es zu jedem separierten topologischen linearen Raum $(E,\mathcal{R})$ eine feinste lineare Topologie $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ gibt, die die gleichen Teilreihen-konvergenten Reihen wie $\mathcal{R}$ besitzt. Die Hauptergebnisse dieser Arbeit bestehen aus den verschiedenen Charakterisierungen dieser zu $\mathcal{R}$ assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie, aus der Konstruktion einer Vielzahl erläuternder Beispiele und aus mehreren neuen Sätzen vom ORLICZ-PETTIS-Typ. Der dabei gefundene Zugang hat den Vorteil, daß ein Teil der Ergebnisse für kommutative topologische Gruppen, topologische lineare Räume, sowie für lokalkonvexe Räume mit sehr ähnlichen Methoden bewiesen werden kann. Als Hauptfall wurde der des topologischen linearen Raumes gewählt. War der Mehraufwand nur gering, so wurden die Ergebnisse für den allgemeineren Fall der kommutativen topologischen Gruppen bewiesen. Soweit es möglich war, wurde die reichere Struktur der lokalkonvexen Räume zum Beweis besserer Resultate ausgenutzt. Die Bezüge zur vorhandenen Literatur sind bei den einzelnen Ergebnissen vermerkt.

Den Inhalt der einzelnen Kapitel und Paragraphen kann man wie folgt zusammenfassen:

In Kapitel I werden die benötigten Grundlagen über summierbare Familien in einer Form zusammengestellt, die für den weiteren Aufbau günstig ist. Dabei konnten sowohl bekannte Aussagen verallgemeinert, als auch neue Aussagen gewonnen werden. In §1 werden verschiedene Summierbarkeitsbegriffe und CAUCHY-Bedingungen definiert und charakterisiert. Diese Begriffe werden zunächst für kommutative topologische Gruppen diskutiert. Soweit für topologische lineare Räume bzw. lokalkonvexe Räume bessere Aussagen möglich sind, wird dies anschließend behandelt. Der kurze §2 bringt die Spezialisierung auf Folgen und stellt die Verbindung zu den üblichen Konvergenzbegriffen für Reihen her. In §3 wird der für Summierbarkeit von Folgen angemessene Begriff der "Summen-Vollständigkeit" ausführlich diskutiert. Es zeigt sich, daß "Summen-vollständig" von fast allen bekannten Vollständigkeitsbegriffen impliziert wird. Lediglich der Begriff "MACKEY-Folgen-vollständig" ist echt schwächer.

In Kapitel II werden Sätze vom ORLICZ-PETTIS-Typ bewiesen und an Beispielen erläutert. Diese Sätze liefern u.a. später für lokalkonvexe Räume Aussagen über das Dual der assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie. In §4 wird zu einem dualen Paar $\langle E,F\rangle$ die feinste polare Topologie charakterisiert, die die gleichen TF-summierbaren bzw. die gleichen BM-summierbaren Familien wie $\sigma(E,F)$ besitzt. In einem Ko-

rollar wird gezeigt, daß dieser Satz die bekannten Sätze vom ORLICZ-PETTIS-Typ für duale Paare und neue Aussagen von diesem Typ enthält. Die Ergebnisse werden in Beispielen auf Funktionen- und Operator-Familien angewandt. In §5 wird gezeigt, daß es zu einer kommutativen topologischen Gruppe $(E,\mathcal{R})$ unter allen $\mathcal{R}$-polaren Gruppentopologien $\mathcal{T}$ auf E, die vom abzählbaren Typ sind, eine feinste gibt, die mit $\eta(\mathcal{R})$ bezeichnet wird. Eine entsprechende Aussage gilt für topologische lineare Räume und für lokalkonvexe Räume. Für ein duales Paar $\langle E,F\rangle$ wird eine Charakterisierung der $\eta(E,F)$-gleichgradig stetigen Teilmengen von F angegeben. Anschließend wird bewiesen, daß die Ausgangstopologie $\mathcal{R}$ und die obere Grenze $\eta(\mathcal{R})\vee\mathcal{R}$ stets die gleichen TF-summierbaren Familien besitzen.

Kapitel III enthält Existenz und Beschreibung der assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie. Dazu werden vorbereitend in §6 die Paare vergleichbarer Topologien charakterisiert, die die gleichen TF-summierbaren Folgen liefern. In §7 werden Existenz und erste Eigenschaften der assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie bewiesen und an Beispielen erläutert. In §8 wird die assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie als verallgemeinerter induktiver Limes im Sinne von GARLING [52], IYAHEN, POPOOLA [67], bzw. als die zu einer Kompaktologie im Sinne von BUCHWALTER [30] assoziierte Topologie dargestellt. Daraus folgt u.a., daß man durch Finalbildungen aus Räumen, die ihre assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie tragen, neue Räume dieser Art gewinnen kann. Nullumgebungsfilter für die assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie werden in §9 angegeben. Mit einer Verallgemeinerung einer Aussage von GROTHENDIECK gelingt es, diese Nullumgebungsfilter durch ihre Spuren auf den Mengen der Kompaktologie zu charakterisieren. Diese Charakterisierungen werden dann zum Beweis von Vollständigkeitsaussagen für das OP-Dual eines lokalkonvexen Raumes verwendet.

In Kapitel IV wird die assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie mit anderen Topologien verglichen. Vorbereitend wird dazu in §10 ein abstraktes Konstruktionsprinzip für final assoziierte Topologien beschrieben. Als Anwendung beweisen wir in Satz (10.21):

> Ist $\mathcal{Z}$ eine final assoziierte Topologie in der Kategorie der lokalkonvexen Räume, so ist $\mathcal{Z}(\mathcal{R})\subset\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ genau dann für alle lokalkonvexen Räume $(E,\mathcal{R})$ erfüllt, wenn diese Inklusion für den speziellen Raum $(m_o,\tau(m_o,l^1))$ erfüllt ist.

In §11 wird gezeigt, daß die assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie stets feiner als die assoziierte Folgen-Topologie ist. Weiterhin wird eine hinreichende Bedingung für die Gleichheit dieser Topologien angegeben. Damit folgt, daß alle vollständig metrisierbaren topologi-

schen linearen Räume ihre assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie tragen. Mit diesen Ergebnissen wird in §12 bewiesen, daß die assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie stets gröber als die assoziierte ultrabornologische Topologie ist. Also tragen auch alle ultrabornologischen Räume ihre assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie. Am Schluß dieses Paragraphen wird gezeigt, daß die assoziierte ultrabornologische Topologie in natürlicher Weise bei der Betrachtung holomorpher Funktionen mit Werten in einem topologischen linearen Raum auftritt. Dabei wird ein Resultat von BUNGART [31] verallgemeinert. In dem kurzen §13 wird gezeigt, wie man durch Übergang zu assoziierten Topologien bekannte Sätze vom ORLICZ-PETTIS-Typ verschärfen kann. In §14 greifen wir auf die Ergebnisse aus §8 zurück und zeigen, daß sich die dort getroffene Zuordnung einer Topologie zu einem Mengensystem in einem topologischen linearen Raum für sehr allgemeine Mengensysteme durchführen läßt. Das resultierende abstrakte Assoziierungsprinzip umfaßt viele bekannte Bildungen wie z.B. die assoziierte Folgentopologie, die assoziierte bornologische bzw. ultrabornologische Topologie, die assoziierte lokaltopologische Topologie und die assoziierte KELLEY-Topologie. Im letzten §15 wird die Unvergleichbarkeit der assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie mit einigen anderen assoziierten Topologien an Beispielen gezeigt. In einem Übersichtsschema wird die (Un-)Vergleichbarkeit der betrachteten Topologien dargestellt.

Soweit wie möglich wurden die Standard-Bezeichnungen aus HORVÁTH [65] verwendet. Duale Paare $\langle E,F\rangle$ werden in dieser Arbeit stets in beiden Argumenten trennend vorausgesetzt. Eine Topologie erfüllt (A.1), wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. An wenigen Stellen werden im Vorgriff Resultate verwendet, die erst später bewiesen werden. Diese Textteile sind durch *...* gekennzeichnet. Eine Zusammenstellung der verwendeten Symbole befindet sich am Ende der Arbeit.

Herrn Professor Dr. J. BATT möchte ich für die Anregung und das stete Interesse am Fortgang dieser Arbeit herzlich danken. Meiner Frau Dr. S. DIEROLF und Herrn Dr. H. PFISTER danke ich für interessante Diskussionen und wertvolle Anregungen. Zum Schluß möchte ich auch allen anderen danken, die mir die Anfertigung dieser Arbeit ermöglicht haben. Dabei denke ich insbesondere an meinen unerwartet verstorbenen Lehrer, Herrn Professor Dr. K. JÖRGENS, der mir die Möglichkeit bot, am Mathematischen Institut der Universität München zu arbeiten.

I. Kapitel

Summierbare Familien

Bei der Bearbeitung von §1 wurde auf zwei Gesichtspunkte besonders geachtet:

(1) Um den Unterschied zwischen "CAUCHY-Bedingung" und "Summierbarkeit" deutlich werden zu lassen, wurden unnötige Vollständigkeitsvoraussetzungen eliminiert.

(2) Der Zusammenhang zwischen Art der Summierbarkeit einer Familie und den topologischen Eigenschaften des Wertebereichs der endlichen Partialsummen wird betont.

Die auftretenden kommutativen Gruppen werden additiv geschrieben. 0 bezeichnet das neutrale Element und mit $\mathfrak{U}_0(E)$ bzw. $\mathfrak{U}_0(E,\mathcal{T})$ wird der Nullumgebungsfilter der kommutativen topologischen Gruppe $(E,\mathcal{T})$ bezeichnet. Die Kardinalität einer Menge M wird mit $\mathrm{card}(M)$ bezeichnet.

§ 1 Summierbare Familien und die CAUCHY-Bedingung.

(1.1) Definition. Sei $(E,\mathcal{T})$ eine kommutative topologische Gruppe und $(x_\iota;\iota\in I)$ eine Familie in E, $\mathcal{F}(I):=\{\sigma\subset I;\ \sigma \text{ endlich}\}$. $\mathcal{F}(I)$ ist durch die Mengeninklusion nach oben gerichtet.

(a) $(x_\iota;\iota\in I)$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung, wenn es zu jedem $U\in\mathfrak{U}_0(E)$ ein $\sigma\in\mathcal{F}(I)$ so gibt, daß gilt: $\tau\in\mathcal{F}(I),\ \tau\cap\sigma=\emptyset \Longrightarrow (\sum_{\iota\in\tau} x_\iota)\in U$ (d.h. $(\sum_{\iota\in\sigma} x_\iota;\ \sigma\in\mathcal{F}(I))$ ist ein CAUCHY-Netz).

(b) $(x_\iota;\iota\in I)$ heißt summierbar zum Wert s, wenn das Netz $(\sum_{\iota\in\sigma} x_\iota;\ \sigma\in\mathcal{F}(I))$ gegen s konvergiert.

(c) $(x_\iota;\iota\in I)$ heißt Teilfamilien-summierbar, wenn für jede Teilmenge J von I die Teilfamilie $(x_\iota;\iota\in J)$ summierbar ist. Wir werden dies durch "TF-summierbar" abkürzen.

(1.2) Bemerkung. Sind $(E,\mathcal{T})$ und $(F,\mathcal{F})$ kommutative topologische Gruppen und ist $T:(E,\mathcal{T})\longrightarrow(F,\mathcal{F})$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, so gilt:

(a) Erfüllt $(x_\iota;\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung in $(E,\mathcal{T})$, so erfüllt $(T(x_\iota);\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung in $(F,\mathcal{F})$.

(b) Ist $(x_\iota;\iota\in I)$ in $(E,\mathcal{T})$ summierbar zum Wert s, so ist $(T(x_\iota);\iota\in I)$ in $(F,\mathcal{F})$ summierbar zum Wert $T(s)$.

(c) Ist $(x_\iota;\iota\in I)$ TF-summierbar, so auch $(T(x_\iota);\iota\in I)$.

(1.3) Lemma. Sei $(E,\mathcal{T})$ eine kommutative topologische Gruppe, $(x_\iota;\iota\in I)$ eine Familie in E und $\pi: I\longrightarrow I$ eine Permutation. Dann gilt:

(a) $(x_\iota;\iota\in I)$ erfüllt genau dann die CAUCHY-Bedingung, wenn $(x_{\pi(\iota)};\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung erfüllt.

(b) $(x_\iota;\iota\in I)$ ist genau dann summierbar zum Wert s, wenn

$(x_{\pi(\iota)};\iota\in I)$ zum Wert s summierbar ist.

Beweis: Es genügt, jeweils eine Richtung zu beweisen, da mit π auch π^{-1} eine Permutation ist.

Zu(a): Sei $V\in\mathcal{U}_0(E)$ vorgegeben. Da $(x_\iota;\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung erfüllt, gibt es ein $\sigma\in\mathcal{F}(I)$ mit: $\tau\in\mathcal{F}(I)$, $\tau\cap\sigma=\emptyset$ $\Longrightarrow(\sum_{\iota\in\tau}x_\iota)\in V$. $\sigma_0:=\pi^{-1}(\sigma)\Longrightarrow\sigma_0\in\mathcal{F}(I)$ und es gilt: $\tau\in\mathcal{F}(I)$, $\tau\cap\sigma_0=\emptyset\Longrightarrow\pi(\tau)\cap\pi(\sigma_0)=\pi(\tau)\cap\sigma=\emptyset\Longrightarrow(\sum_{\kappa\in\pi(\tau)}x_\kappa)=(\sum_{\iota\in\tau}x_{\pi(\iota)})\in V.\Longrightarrow(x_{\pi(\iota)};\iota\in I)$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung.

Zu (b): Dies beweist man analog. ./.

(1.4) Lemma. Sei $(U_\alpha;\alpha\in A)$ eine Nullumgebungsbasis in der kommutativen topologischen Gruppe $(E,\mathcal{T})$. Erfüllt $(x_\iota;\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung in $(E,\mathcal{T})$, so gilt

$$\operatorname{card}(\{\iota\in I;\ x_\iota\notin\overline{\{0\}}\})\leq\max\{\operatorname{card}(A),\operatorname{card}(\mathbb{N})\}.$$

Beweis: Da $(x_\iota;\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung erfüllt, gibt es zu jedem $\alpha\in A$ ein $\sigma_\alpha\in\mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft: $\tau\in\mathcal{F}(I)$, $\tau\cap\sigma_\alpha=\emptyset$ $\Longrightarrow(\sum_{\iota\in\tau}x_\iota)\in U_\alpha$. $J:=\bigcup_{\alpha\in A}\sigma_\alpha\Longrightarrow\operatorname{card}(J)\leq\max\{\operatorname{card}(A),\operatorname{card}(\mathbb{N})\}$. $\iota\notin J\Longrightarrow x_\iota\in U_\alpha\ \forall\alpha\in A\Longrightarrow x_\iota\in\overline{\{0\}}$. Also gilt: $x_\iota\notin\overline{\{0\}}\Longrightarrow\iota\in J$, d.h. $\{\iota\in I;\ x_\iota\notin\overline{\{0\}}\}\subset J$. ./.

Für das Folgende ist es günstig, die Summen $\sum_{\iota\in\sigma}x_\iota$ auch als Wert einer Abbildung schreiben zu können, und wir wählen dafür folgende Notation:

Ist $(x_\iota;\iota\in I)$ eine Familie in einer kommutativen Gruppe und $\sigma\in\mathcal{F}(I)$, so sei $\$(\sigma):=\sum_{\iota\in\sigma}x_\iota$ gesetzt. Soll die Abhängigkeit von der Familie $x=(x_\iota;\iota\in I)$ hervorgehoben werden, so schreiben wir $\$[x](\sigma)$. Ist $(x_\iota;\iota\in I)$ eine Familie in einem Vektorraum und $\lambda=(\lambda_\iota;\iota\in I)\in\mathbb{K}^{(I)}:=\{(\lambda_\iota;\iota\in I);\lambda_\iota\neq 0$ nur für endlich viele $\iota\in I\}$, so schreiben wir auch $\$[x](\lambda)=\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota x_\iota$ bzw. $\$(\lambda)=\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota x_\iota$.

Fortsetzungen der Abbildung $\$$ auf Obermengen von $\mathcal{F}(I)$ in der Potenzmenge $\operatorname{Pot}(I)$ von I bzw. auf Obermengen von $\mathbb{K}^{(I)}$ in $\mathbb{K}^I$ werden meist wieder mit $\$$ bezeichnet.

Weiterhin betrachten wir $\{0,1\}$ stets als diskret topologisierte Gruppe; $\{0,1\}^I$ sei mit der Produktstruktur versehen. $\mathcal{F}(I)$ und $\operatorname{Pot}(I)$ werden mit $\{0,1\}^{(I)}$ bzw. $\{0,1\}^I$ identifiziert und damit zu kommutativen separierten topologischen Gruppen. Eine Umgebungsbasis der 0 in der Gruppe $\{0,1\}^I$ erhält man in der Form

$$U_0(\sigma):=\{L\subset I;\chi_L(\iota)=0\ \forall\iota\in\sigma\}=\{L\subset I;\ L\cap\sigma=\emptyset\}\quad(\sigma\in\mathcal{F}(I)).$$

χ_L ist dabei die charakteristische Funktion zu $L\subset I$. Für $J\subset I$ ist eine Umgebungsbasis gegeben durch:

$$U_J(\sigma) := \chi_J + U_o(\sigma) = \{K \subset I;\ \chi_K = \chi_J + \chi_L \text{ mit } L \subset I,\ L \cap \sigma = \emptyset\}$$
$$= \{K \subset I;\ K \cap \sigma = J \cap \sigma\} \quad (\sigma \in \mathcal{F}(I)).$$

Mit der Äquivalenz

$(K \cap \sigma = J \cap \sigma) \Longleftrightarrow (K \cap (\sigma \setminus J) = \emptyset,\ J \cap \sigma \subset K)$ erhält man für $\tau \in \mathcal{F}(I)$ eine Umgebungsbasis in der Form

$$W_\tau(\sigma') := \{\eta \in \mathcal{F}(I);\ \eta \cap \sigma' = \emptyset,\ \eta \supset \tau\} \quad (\sigma' \in \mathcal{F}(I),\ \sigma' \cap \tau = \emptyset).$$

<u>(1.5) Satz.</u> Sei $(E, \mathcal{T})$ eine kommutative topologische Gruppe und $(x_\iota;\ \iota \in I)$ eine Familie in E. $\mathcal{F}(I)$ und $\mathrm{Pot}(I)$ seien mit $\{0,1\}^{(I)}$ bzw. $\{0,1\}^I$ identifiziert und entsprechend topologisiert. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\$[x]: \mathcal{F}(I) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ ist gleichmäßig stetig.

(b) $\$[x]: \mathcal{F}(I) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ ist stetig.

(c) Es gibt ein $\rho \in \mathcal{F}(I)$, so daß $\$[x]$ in ρ stetig ist.

(d) $(x_\iota;\ \iota \in I)$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung.

(e) Ist $J \subset I$ abzählbar, so erfüllt $(x_\iota;\ \iota \in J)$ die CAUCHY-Bedingung.

(f) Für jede Folge $(\sigma_n; n \in \mathbb{N})$ in $\mathcal{F}(I)$ mit $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ ist $(\$[x](\sigma_n); n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge. (D.h.: $\$[x]: \mathcal{F}(I) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ ist s-additiv.)

<u>Beweis:</u>

<u>(c) $\Longrightarrow$ (d):</u> Sei $\$[x]$ in $\rho \in \mathcal{F}(I)$ stetig und $V \in \mathcal{U}_o(E)$ gegeben. Dann gibt es ein $\sigma \in \mathcal{F}(I)$, $\sigma \cap \rho = \emptyset$ mit $\$[x](\tau) - \$[x](\rho) \in V$ für alle $\tau \in W_\rho(\sigma)$. $\tau \in W_\rho(\sigma) \Longrightarrow \tau \supset \rho \Longrightarrow \tau = \rho \cup (\tau \setminus \rho) \Longrightarrow \$[x](\tau) - \$[x](\rho) = \$[x](\tau \setminus \rho) \Longrightarrow \$[x](\tau \setminus \rho) \in V \ \forall\ \tau \in W_\rho(\sigma)$. Wir setzen $\sigma^* := \sigma \cup \rho$. Sei jetzt $\eta \in \mathcal{F}(I)$ mit $\eta \cap \sigma^* = \emptyset$ gegeben. Dann ist die Vereinigung $\eta \cup \rho =: \tau$ disjunkt und es gilt $\tau \setminus \rho = \eta$, $\tau \in \mathcal{F}(I)$, $\tau \cap \sigma = \emptyset$, d.h. $\tau \in W_\rho(\sigma)$. Mit obiger Stetigkeitsbedingung erhält man also $\$[x](\eta) \in V \ \forall\ \eta \in \mathcal{F}(I)$, $\eta \cap \sigma^* = \emptyset$. $\Longrightarrow (x_\iota;\ \iota \in I)$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung.

<u>(d) $\Longrightarrow$ (a):</u> Sei $V \in \mathcal{U}_o(E)$. Wir wählen $V_1 \in \mathcal{U}_o(E)$ so, daß $V_1 - V_1 \subset V$ gilt. Da $(x_\iota;\ \iota \in I)$ nach Voraussetzung die CAUCHY-Bedingung erfüllt, gibt es zu $V_1 \in \mathcal{U}_o(E)$ ein $\sigma \in \mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft: $\tau \in \mathcal{F}(I)$, $\tau \cap \sigma = \emptyset \Longrightarrow \$[x](\tau) \in V_1$. Seien jetzt $\eta, \tau \in \mathcal{F}(I)$, $\eta \cap \sigma = \tau \cap \sigma$, d.h. $\chi_\eta - \chi_\tau \in U_o(\sigma)$. Dann gilt $\$[x](\eta) - \$[x](\tau) = \$[x](\eta \cap \sigma) + \$[x](\eta \setminus \sigma) - \$[x](\tau \cap \sigma) - \$[x](\tau \setminus \sigma) = \$[x](\eta \setminus \sigma) - \$[x](\tau \setminus \sigma) \in V_1 - V_1 \subset V. \Longrightarrow \$[x]$ ist gleichmäßig stetig.

Da (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) unmittelbar zu sehen ist, ist damit die Äquivalenz von (a),...,(d) bewiesen.

<u>(d) $\Longrightarrow$ (e):</u> Dies ist unmittelbar aus Definition (1.1) zu ersehen.
<u>(e) $\Longrightarrow$ (d):</u> Erfüllt $(x_\iota;\iota\in I)$ nicht die CAUCHY-Bedingung, so gibt es ein $U\in\mathcal{U}_0(E)$, so daß für alle $\sigma\in\mathcal{F}(I)$ ein $\tau\in\mathcal{F}(I)$ mit $\sigma\cap\tau=\emptyset$ und $\$[x](\tau)\notin U$ existiert. Wir definieren induktiv eine Folge $(\sigma_n;\ n\in\mathbb{N})$ in $\mathcal{F}(I)$. Zunächst gibt es ein $\sigma_1\in\mathcal{F}(I)$ mit $\$[x](\sigma_1)\notin U$. Sind $\sigma_1,\dots,\sigma_n\in\mathcal{F}(I)$ schon definiert, so gibt es zu $\sigma_n':=\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_i\in\mathcal{F}(I)$ ein $\tau_n\in\mathcal{F}(I)$ mit $\tau_n\cap\sigma_n'=\emptyset$ und $\$[x](\tau_n)\notin U$. Wir setzen $\sigma_{n+1}:=\sigma_n'\cup\tau_n$. $J:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\sigma_n$ ist abzählbar. Wir zeigen, daß $(x_\iota;\iota\in J)$ nicht die CAUCHY-Bedingung erfüllt. Sei dazu U die Nullumgebung aus obiger Konstruktion von $(\sigma_n;\ n\in\mathbb{N})$ und $\sigma\in\mathcal{F}(J)$. Dann gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ mit $\sigma\subset\sigma_n$. Für $\tau_n:=(\sigma_{n+1}\setminus\sigma_n)\in\mathcal{F}(J)$ gilt dann $\tau_n\cap\sigma=\emptyset$ und $\$[x](\tau_n)\notin U$ nach Konstruktion.
<u>(f) $\Longrightarrow$ (d):</u> Erfüllt $(x_\iota;\iota\in I)$ nicht die CAUCHY-Bedingung, so folgt: $\exists\ V\in\mathcal{U}_0(E):\forall\ \sigma\in\mathcal{F}(I)\ \exists\ \tau\in\mathcal{F}(I)$ mit $\sigma\cap\tau=\emptyset$ und $\$[x](\tau)\notin V$. Durch Induktion kann man also eine Folge $(\sigma_n;\ n\in\mathbb{N})$ in $\mathcal{F}(I)$ so bestimmen, daß $\sigma_i\cap\sigma_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ und $\$[x](\sigma_n)\notin V$ $(n\in\mathbb{N})$ gilt. Insbesondere ist $(\$[x](\sigma_n);\ n\in\mathbb{N})$ keine Nullfolge.
<u>(d) $\Longrightarrow$ (f):</u> Sei $(\sigma_n;\ n\in\mathbb{N})$ eine Folge in $\mathcal{F}(I)$ mit $\sigma_i\cap\sigma_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ und $U\in\mathcal{U}_0(E)$ vorgegeben. Da $(x_\iota;\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung erfüllt, gibt es zu U ein $\sigma_0\in\mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft: $\tau\in\mathcal{F}(I),\tau\cap\sigma_0=\emptyset\Longrightarrow\$[x](\tau)\in U$. Da σ_0 endlich ist und die Mengen σ_i $(i\in\mathbb{N})$ paarweise disjunkt sind, ist $n_0:=\sup\{i\in\mathbb{N};\ \sigma_0\cap\sigma_i\neq\emptyset\}$ endlich und man erhält $\$[x](\sigma_i)\in U$ für alle $i>n_0$. ./.

<u>(1.6) Korollar.</u> Erfüllt $(x_\iota;\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung, so ist $\$[x](\mathcal{F}(I))$ präkompakt in $(E,\mathcal{T})$.
<u>Beweis:</u> $\mathcal{F}(I)\simeq\{0,1\}^{(I)}$ ist Untergruppe der kompakten Gruppe $\{0,1\}^I$ und deshalb präkompakt. Mit (1.5a) folgt daher die Behauptung. ./.

Nun erfülle $(x_\iota;\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung in der kommutativen separierten topologischen Gruppe $(E,\mathcal{T})$. Da $\mathcal{F}(I)$ in $\mathrm{Pot}(I)$ dicht ist, ist $\$[x]$ genau dann stetig auf $\mathrm{Pot}(I)$ fortsetzbar, wenn für jedes $J\subset I$ der Limes $\lim\limits_{\substack{\sigma\to J\\ \sigma\in\mathcal{F}(I)}}\$[x](\sigma)$ in $(E,\mathcal{T})$ existiert (BOURBAKI [25, Ch. 1, p. 91]).
Dafür ist hinreichend und wegen der Kompaktheit von $\{0,1\}^I$ auch notwendig, daß $\$[x](\mathcal{F}(I))$ in einer vollständigen Teilmenge von $(E,\mathcal{T})$ liegt.

<u>(1.7) Lemma.</u> Sei $(E,\mathcal{T})$ eine kommutative separierte topologische Gruppe, $(x_\iota;\iota\in I)$ eine Familie in E und $J\subset I$. Dann sind äquivalent:

(a) Es existiert $\lim\limits_{\substack{\sigma \to J \\ \sigma \in \mathcal{F}(I)}} \$[x](\sigma)$ in $(E, \mathcal{T})$.

(b) $(x_\iota ; \iota \in I)$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung und $(x_\iota ; \iota \in J)$ ist summierbar.

<u>Beweis:</u>

<u>(a) $\Longrightarrow$ (b):</u> Es existiere $\lim\limits_{\substack{\sigma \to J \\ \sigma \in \mathcal{F}(I)}} \$[x](\sigma) =: \$[x](J)$ in $(E, \mathcal{T})$ und $V \in \mathcal{U}_0(E)$ sei vorgegeben. Zu V bestimmen wir $V_1 \in \mathcal{U}_0(E)$ mit $V_1 - V_1 \subset V$. Zu V_1 gibt es ein $\sigma_0 \in \mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft:
$\$[x](\sigma) - \$[x](J) \in V_1$ für alle $\sigma \in U_J(\sigma_0) \cap \mathcal{F}(I)$.
$\sigma \in U_J(\sigma_0) \cap \mathcal{F}(I) \Longleftrightarrow (\sigma \in \mathcal{F}(I),\ \sigma \cap \sigma_0 = J \cap \sigma_0)$
$\Longleftrightarrow (\sigma \in \mathcal{F}(I),\ \sigma \cap (\sigma_0 \setminus J) = \emptyset,\ J \cap \sigma_0 \subset \sigma)$.
Insbesondere gilt also $\sigma_0 \cap J \in U_J(\sigma_0) \cap \mathcal{F}(I)$.

$$\left.\begin{array}{l} \$[x](\sigma) - \$[x](J) \in V_1 \\ \$[x](\sigma_0 \cap J) - \$[x](J) \in V_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \$[x](\sigma) - \$[x](\sigma_0 \cap J) \in V_1 - V_1 \subset V$$

für alle $\sigma \in \mathcal{F}(I)$ mit $\sigma \cap (\sigma_0 \setminus J) = \emptyset$ und $J \cap \sigma_0 \subset \sigma$.
$\Longrightarrow \$[x](\sigma \setminus (\sigma_0 \cap J)) \in V\ \forall\ \sigma \in \mathcal{F}(I)$ mit $\sigma \cap \sigma_0 \cap \complement J = \emptyset$ und $J \cap \sigma_0 \subset \sigma$.
Sei $\tau \in \mathcal{F}(I)$, $\tau \cap \sigma_0 = \emptyset$. Wir setzen $\sigma := \tau \cup (\sigma_0 \cap J)$. Diese Vereinigung ist disjunkt und es gilt: $\sigma \setminus (\sigma_0 \cap J) = \tau$, $\sigma \supset \sigma_0 \cap J$, $\sigma \cap \sigma_0 \cap \complement J = \emptyset$. $\Longrightarrow \$[x](\sigma \setminus (\sigma_0 \cap J)) = \$[x](\tau) \in V\ \forall\ \tau \in \mathcal{F}(I), \tau \cap \sigma_0 = \emptyset$.
$\Longrightarrow (x_\iota ; \iota \in I)$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung. Es bleibt die Summierbarkeit von $(x_\iota ; \iota \in J)$ zu zeigen. Dazu gehen wir von V_1 und σ_0 von oben aus und setzen $\sigma^* := \sigma_0 \cap J$. Dann ist $\sigma^* \in \mathcal{F}(J)$ und es gilt:
$\tau \in \mathcal{F}(J), \tau \supset \sigma^* \Longrightarrow \tau \in \mathcal{F}(I),\ J \cap \sigma_0 = \sigma^* \subset \tau,\ \tau \cap (\sigma_0 \setminus J) = \emptyset$
$\Longrightarrow \$[x](\tau) - \$[x](J) \in V_1$, d.h. $\$[x](\tau) - \$[x](J) \in V_1$ für alle $\tau \in \mathcal{F}(J)$ mit $\tau \supset \sigma^*$. $\Longrightarrow (x_\iota ; \iota \in J)$ ist summierbar zum Wert $\$[x](J)$.

<u>(b) $\Longrightarrow$ (a):</u> Sei $V \in \mathcal{U}_0(E)$ gegeben. Wir wählen $V_1 \in \mathcal{U}_0(E)$ mit $V_1 + V_1 \subset V$. Da $(x_\iota ; \iota \in J)$ summierbar ist, gibt es ein $\sigma_0 \in \mathcal{F}(J)$ mit der Eigenschaft: $\sigma \in \mathcal{F}(J), \sigma \supset \sigma_0 \Longrightarrow \$[x](\sigma) - \$[x](J) \in V_1$.
Da $(x_\iota ; \iota \in I)$ die CAUCHY-Bedingung erfüllt, gibt es ein $\sigma_1 \in \mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft: $\tau \in \mathcal{F}(I),\ \tau \cap \sigma_1 = \emptyset \Longrightarrow \$[x](\tau) \in V_1$. Wir setzen $\sigma^* := \sigma_0 \cup \sigma_1 \Longrightarrow \sigma^* \in \mathcal{F}(I) \Longrightarrow U_J(\sigma^*)$ ist wohlerklärt (vergl. p. 3). Sei $\eta \in U_J(\sigma^*) \cap \mathcal{F}(I) \Longrightarrow J \cap \sigma^* \subset \eta$ und $\eta \cap (\sigma^* \setminus J) = \emptyset$.
$\$[x](\eta) - \$[x](J) = \$[x](\eta \cap \complement J) + (\$[x](\eta \cap J) - \$[x](J))$.
$(\eta \cap \complement J) \in \mathcal{F}(I)$, $(\eta \cap \complement J) \cap \sigma_1 \subset \eta \cap \complement J \cap \sigma^* = \emptyset \Longrightarrow \$[x](\eta \cap \complement J) \in V_1$.
$(\eta \cap J) \in \mathcal{F}(J)$, $\eta \cap J \supset \sigma^* \cap J \supset \sigma_0 \cap J = \sigma_0 \Longrightarrow \$[x](\eta \cap J) - \$[x](J) \in V_1$.
$\Longrightarrow \$[x](\eta) - \$[x](J) \in V_1 + V_1 \subset V\ \forall\ \eta \in U_J(\sigma^*) \cap \mathcal{F}(I)$
$\Longrightarrow \$[x](J) = \lim\limits_{\substack{\sigma \to J \\ \sigma \in \mathcal{F}(I)}} \$[x](\sigma)$.

./.

<u>(1.8) Satz.</u> Ist $(E,\mathcal{T})$ eine kommutative separierte topologische Gruppe und ist $(x_\iota;\iota\in I)$ TF-summierbar in $(E,\mathcal{T})$, so ist $\$[x](\mathcal{F}(I))$ relativ kompakt und es gilt $\overline{\$[x](\mathcal{F}(I))}^{\mathcal{T}} = \$[x](\mathrm{Pot}(I))$.

<u>Beweis:</u> Da $(x_\iota;\iota\in I)$ TF-summierbar ist, besitzt $\$[x] : \mathcal{F}(I) \longrightarrow (E,\mathcal{T})$ eine stetige Fortsetzung $\$[x]:\mathrm{Pot}(I)\longrightarrow(E,\mathcal{T})$. $\mathrm{Pot}(I)$ ist topologisch isomorph zu $\{0,1\}^I$, also kompakt $\Longrightarrow$ $\$[x](\mathcal{F}(I))$ ist relativ kompakt. $\$[x](\mathrm{Pot}(I)) = \overline{\$[x](\mathcal{F}(I))} \subset \overline{\$[x](\mathcal{F}(I))} \subset \overline{\$[x](\mathrm{Pot}(I))} = \$[x](\mathrm{Pot}(I))$. $\Longrightarrow$ $\overline{\$[x](\mathcal{F}(I))}^{\mathcal{T}} = \$[x](\mathrm{Pot}(I))$. ./.

Ist $(E,\mathcal{T})$ eine kommutative separierte topologische Gruppe und $(x_\iota;\iota\in I)$ eine Familie in E, so impliziert die Präkompaktheit von $\$[x](\mathcal{F}(I))$ im allgemeinen nicht, daß $(x_\iota;\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung erfüllt (vgl. dazu (1.25a)). Für topologische lineare Räume hat man jedoch folgende Äquivalenz:

<u>(1.9) Satz</u> (ROBERTSON [103, p. 147]). Für eine Familie $(x_\iota;\iota\in I)$ in einem topologischen Vektorraum $(E,\mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $(x_\iota;\iota\in I)$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung.

(b) $\$[x](\mathcal{F}(I))$ ist präkompakt in $(E,\mathcal{T})$.

<u>Beweis:</u> Wegen (1.6) genügt es "(b) $\Longrightarrow$ (a)" zu zeigen. Wir nehmen an, $\$[x](\mathcal{F}(I))$ ist präkompakt, aber $(x_\iota;\iota\in I)$ erfüllt nicht die CAUCHY-Bedingung. Dann gibt es ein $U\in\mathcal{U}_0(E)$ und eine Folge $(\mathcal{T}_n;\ n\in\mathbb{N})$ in $\mathcal{F}(I)$ mit $\mathcal{T}_i\cap\mathcal{T}_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ und $\$[x](\mathcal{T}_n)\notin U$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Wir setzen $z_n := \$[x](\mathcal{T}_n)$ $(n\in\mathbb{N})$, $z:=(z_n;\ n\in\mathbb{N})$. Dann gilt $B:=\$[z](\mathcal{F}(\mathbb{N}))\subset\$[x](\mathcal{F}(I))$. Also ist B präkompakt. Sei $V\in\mathcal{U}_0(E)$, V kreisförmig mit $V+V\subset U$ gewählt. Da B insbesondere beschränkt ist, gibt es ein $k\in\mathbb{N}$ mit $B\subset kV$. Zu diesem k existiert $W\in\mathcal{U}_0(E)$, W kreisförmig mit $W+\ldots+W\subset V$ (k Summanden). Da $\{z_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ als Teilmenge von $\$[x](\mathcal{F}(I))$ präkompakt ist, gibt es $n(1),\ldots,n(m)\in\mathbb{N}$ mit $\{z_n;n\in\mathbb{N}\}\subset\bigcup_{i=1}^{m}(z_{n(i)}+W)$. $\Longrightarrow\exists\, j\in\{1,\ldots,m\}$ und $p:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$, p injektiv mit $\{z_{p(i)};\ i\in\mathbb{N}\}\subset z_{n(j)}+W$. $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} z_{p(i)}\in(z_{n(j)}+W)+\ldots+(z_{n(j)}+W)$ (k Summanden) $\Longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{k} z_{p(i)}\in k\cdot z_{n(j)}+V$.

$\Longrightarrow$ $k\cdot z_{n(j)}\in(\sum_{i=1}^{k} z_{p(i)})+V\subset B+V\subset kV+kV\subset kU \Longrightarrow z_{n(j)}\in U$.

Dies ist ein Widerspruch zur Konstruktion von $(z_n;\ n\in\mathbb{N})$. ./.

Für eine spezielle Anwendung in §3 notieren wir noch das folgende Lemma, das in manchen Fällen eine Verschärfung der Aussage (1.4) liefert.

(1.10) Lemma. Ist $(E,\mathcal{T})$ ein topologischer linearer Raum, M eine trennende Familie stetiger linearer Funktionale auf $(E,\mathcal{T})$ und $(x_\iota;\iota\in I)$ eine Familie in E, die die $\mathcal{T}$-CAUCHY-Bedingung erfüllt, so gilt $\operatorname{card}(\{\iota\in I;\ x_\iota\neq 0\})\leq \operatorname{card}(\mathbb{N})\cdot\operatorname{card}(M)$.

Beweis: Für $m\in M$ sei $I_m:=\{\iota\in I;\ m(x_\iota)\neq 0\}$. Da $m:(E,\mathcal{T})\longrightarrow\mathbb{K}$ stetig ist, erfüllt $(m(x_\iota);\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung in $\mathbb{K}$. Mit (1.4) folgt die Abzählbarkeit von I_m. $J:=\bigcup_{m\in M} I_m \Longrightarrow \operatorname{card}(J)\leq\operatorname{card}(M)\cdot\operatorname{card}(\mathbb{N})$. $\iota\in I\setminus J \Longrightarrow m(x_\iota)=0$ für alle $m\in M$ $\Longrightarrow x_\iota=0$. ./.

Den Unterschied zwischen (1.4) und (1.10) sieht man etwa am Beispiel $(l^1,\sigma(l^1,l^\infty))$ mit dem Satz von ORLICZ-PETTIS (vgl. Einleitung). Eine zu (1.10) analoge Aussage kann man offenbar für kommutative topologische Gruppen und stetige Homomorphismen in metrisierbare kommutative topologische Gruppen beweisen.

Mit Satz (1.9) kann man die Aussage von Satz (1.8) für topologische Vektorräume verschärfen.

(1.11) Satz. Für eine Familie $(x_\iota;\iota\in I)$ in einem separierten topologischen linearen Raum $(E,\mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent:
(a) $(x_\iota;\iota\in I)$ ist TF-summierbar.
(b) $\$[x](\mathcal{F}(I))$ ist relativ kompakt.
Ist (a) oder (b) erfüllt, so ist $\overline{\$[x](\mathcal{F}(I))}^{\mathcal{T}}=\$[x](\operatorname{Pot}(I))$ und diese Menge ist kompakt in $(E,\mathcal{T})$.

Beweis: Wegen (1.8) ist nur "(b) $\Longrightarrow$ (a)" zu zeigen. Ist $\$[x](\mathcal{F}(I))$ relativ kompakt, so ist $\$[x](\mathcal{F}(I))$ in einer vollständigen präkompakten Menge enthalten. Nach (1.9) erfüllt daher $(x_\iota;\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung und $\$[x]$ besitzt eine stetige Fortsetzung auf $\operatorname{Pot}(I)$ nach (1.7). Zusammen erhält man, daß $(x_\iota;\iota\in I)$ TF-summierbar ist. ./.

(1.12) Bemerkungen.
(a) Einen Spezialfall von Satz(1.11) findet man bereits bei GELFAND[54, p. 245].
(b) Ist $(E,\mathcal{T})$ zusätzlich lokalkonvex, so kann man in (1.11) "(b) $\Longrightarrow$ (a)" ohne Verwendung von (1.9) direkt zeigen:
$M:=\$[x](\mathcal{F}(I))$ ist relativ kompakt in $(E,\mathcal{T})\Longrightarrow M$ ist beschränkt $\Longrightarrow M^o\in\mathfrak{U}_o(E',\beta(E',E))$ und es gilt $|\langle\sum_{\iota\in\sigma}x_\iota,x'\rangle|\leq 1$ für alle $x'\in M^o$, $\sigma\in\mathcal{F}(I)\Longrightarrow\sum_{\iota\in\sigma}|\langle x_\iota,x'\rangle|\leq 4$ für alle $x'\in M^o$, $\sigma\in\mathcal{F}(I)$ (vgl. PIETSCH[98, p. 18]). Da M^o absorbant ist, folgt daraus die Summierbarkeit von $(\langle x',x_\iota\rangle;\iota\in I)$ für alle $x'\in E'$. Sei $g:E'\longrightarrow\mathbb{K}$ durch $g(x'):=\sum_{\iota\in I}\langle x',x_\iota\rangle$ $(x'\in E')$ definiert.

g ist linear und es gilt $|\langle g,x'\rangle| \leq 4$ für alle $x' \in M^o \Longrightarrow g \in E''$. Bezeichnet $j: E \hookrightarrow E''$ die kanonische Inklusion, so konvergiert das Netz $(j(\$[x](\sigma)); \sigma \in \mathcal{F}(I))$ bezüglich $\sigma(E'',E')$ gegen g. $\overline{M}^{\gamma}$ ist kompakt in (E,γ), $j_1:(\overline{M}^{\gamma}, \gamma \cap \overline{M}) \longrightarrow (j(\overline{M}), \sigma(E'',E') \cap j(\overline{M}))$, $j_1(x) := j(x)$ $(x \in \overline{M})$ ist stetig und bijektiv, also topologisch. Daher konvergiert $(\$[x](\sigma); \sigma \in \mathcal{F}(I))$ in (E,γ) gegen $j_1^{-1}(g)$, d. h. $(x_\iota; \iota \in I)$ ist summierbar in (E,γ). Dieser Schluß ist auf jede Teilfamilie von $(x_\iota; \iota \in I)$ anwendbar; man erhält also (1.11a). ./.

Die folgende geometrische Aussage liefert mit Satz(1.9) bei Spezialisierung auf lokalkonvexe Räume eine Vielzahl von Kriterien für das Erfülltsein der CAUCHY-Bedingung.

<u>(1.13) Lemma</u> (ROBERTSON[103, p. 148]). Ist $(x_\iota; \iota \in I)$ eine Familie in einem $\mathbb{K}$-linearen Raum E und wird $A := \$[x](\mathcal{F}(I))$ gesetzt, so gilt:

(a) $C(A) = \{ \sum_{\iota \in \sigma} \lambda_\iota x_\iota ;\ \sigma \in \mathcal{F}(I),\ 0 \leq \lambda_\iota \leq 1\ (\iota \in \sigma) \}$.

(b) $\Gamma(A) \subset \{ \sum_{\iota \in \sigma} \lambda_\iota x_\iota ;\ \sigma \in \mathcal{F}(I),\ |\lambda_\iota| \leq 1\ (\iota \in \sigma) \} \subset (C(A) - C(A)) + i \cdot (C(A) - C(A)) \subset 4\Gamma(A)$.

($C(A)$ bzw. $\Gamma(A)$ bezeichnet dabei die konvexe bzw. absolutkonvexe Hülle von A.)

<u>Beweis:</u>

<u>Zu (a):</u> $s \in C(A) \Longrightarrow \exists\, s_1,\dots,s_n \in A,\ \mu_1,\dots,\mu_n \in (0,1],\ \sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ mit $s = \sum_{i=1}^n \mu_i s_i$. $s_i \in A \Longrightarrow \exists\, \sigma_i \in \mathcal{F}(I)$: $s_i = \$[x](\sigma_i)$; $\sigma := (\bigcup_{i=1}^n \sigma_i) \in \mathcal{F}(I)$. $\lambda_\kappa := \sum_{\kappa \in \sigma_j} \mu_j$ $(\kappa \in \sigma) \Longrightarrow 0 \leq \lambda_\kappa \leq 1$ und es gilt: $s = \sum_{i=1}^n \mu_i s_i = \sum_{\kappa \in \sigma} \lambda_\kappa x_\kappa \Longrightarrow C(A) \subset \{ \sum_{\iota \in \sigma} \lambda_\iota x_\iota ;\ \sigma \in \mathcal{F}(I),\ 0 \leq \lambda_\iota \leq 1\ (\iota \in \sigma) \}$.

Sei $\sigma \in \mathcal{F}(I)$, $0 \leq \lambda_\iota \leq 1$ $(\iota \in \sigma)$. O.E. $\sigma = \{1,\dots,n\}$, $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

$$\Longrightarrow \sum_{\iota \in \sigma} \lambda_\iota x_\iota = \lambda_1 \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{\in A} + \sum_{j=2}^n \underbrace{(\lambda_j - \lambda_{j-1})}_{\geq 0} \underbrace{\sum_{r=j}^n x_r}_{\in A} + \underbrace{(1 - \lambda_n)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{0}_{\in A}$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{\iota \in \sigma} \lambda_\iota x_\iota\right) \in C(A).$$

<u>Zu (b):</u> Sei $B := \{ \sum_{\iota \in \sigma} \lambda_\iota x_\iota ;\ \sigma \in \mathcal{F}(I), |\lambda_\iota| \leq 1\ (\iota \in \sigma) \}$. Dann gilt $A \subset B$ und B ist absolutkonvex, also gilt auch $\Gamma(A) \subset B$. Für die nächste Inklusion schreibt man $\lambda_\iota = \xi_\iota + i\eta_\iota$ mit $\xi_\iota, \eta_\iota \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 := \{\iota \in \sigma ;\ \xi_\iota > 0\}$, $\sigma_2 := \{\iota \in \sigma ;\ \xi_\iota \leq 0\}$, $\sigma_3 := \{\iota \in \sigma ;\ \eta_\iota > 0\}$, $\sigma_4 := \{\iota \in \sigma ;\ \eta_\iota \leq 0\}$.

Aus der Darstellung $\sum_{\iota \in \sigma} \lambda_\iota x_\iota = (\sum_{\iota \in \sigma_1} \xi_\iota x_\iota - \sum_{\iota \in \sigma_2} (-\xi_\iota) x_\iota) + i(\sum_{\iota \in \sigma_3} \eta_\iota x_\iota - \sum_{\iota \in \sigma_4} (-\eta_\iota) x_\iota)$ folgt die angegebene Inklusion. Die letzte Inklusion ist trivial. ./.

Zum Beweis der angekündigten Kriterien für das Erfülltsein der CAUCHY-Bedingung in lokalkonvexen Räumen benötigen wir noch folgende Hilfsausage.

(1.14) Satz. Sei $(X,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum und $Y \subset X$. Dann gilt: $(Y,\mathcal{U} \cap Y)$ ist genau dann präkompakt, wenn alle abzählbaren Teilmengen von Y (in der induzierten Uniformität) präkompakt sind.

Beweis: Ist $(Y,\mathcal{U} \cap Y)$ nicht präkompakt, so gibt es ein $U \in \mathcal{U} \cap Y$, so daß für alle endlichen Teilmengen F von Y die Beziehung $U[F] \subsetneq Y$ gilt. Wir können also induktiv eine Folge $(y_n;\ n \in \mathbb{N})$ in Y so bestimmen, daß $y_{n+1} \notin U[\{y_p;\ p = 1,\dots,n\}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Offenbar ist dann $\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ nicht präkompakt. Die andere Richtung ist trivial. ./.

(1.15) Bemerkung. Der Beweis von (1.14) zeigt, daß $(Y,\mathcal{U} \cap Y)$ genau dann präkompakt ist, wenn jede Folge in Y ein CAUCHY-Teilnetz besitzt.

(1.16) Satz. Ist $(E,\mathcal{T})$ ein separierter lokalkonvexer Raum und $(x_\iota;\ \iota \in I)$ eine Familie in E, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $(x_\iota;\ \iota \in I)$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung.

(b) Für jede Familie $(\lambda_\iota;\ \iota \in I) \in l^\infty(I)$ erfüllt $(\lambda_\iota x_\iota;\ \iota \in I)$ die CAUCHY-Bedingung.

(c) Für alle $U \in \mathcal{U}_0(E)$ existiert $\sigma \in \mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft: $\tau \in \mathcal{F}(I), \tau \cap \sigma = \emptyset \Longrightarrow \sum_{\iota \in \tau} |\langle x', x_\iota \rangle| \leq 1$ für alle $x' \in U^0$.

(d) $A := \{\sum_{\iota \in \sigma} \lambda_\iota x_\iota;\ \sigma \in \mathcal{F}(I), |\lambda_\iota| \leq 1\ (\iota \in \sigma)\}$ ist präkompakt in $(E,\mathcal{T})$.

(e) $\$[x]: \mathbb{K}^{(I)} \longrightarrow (E,\mathcal{T})$ ist auf gleichmäßig beschränkten Mengen gleichmäßig stetig. (Dabei sei $\mathbb{K}^{(I)}$ mit der vom Produkt $\mathbb{K}^I$ induzierten Topologie versehen.)

(f) $\$[x]: (\mathbb{K}^{(I)}, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E,\mathcal{T})$ ist präkompakt.

(g) Für jedes punktweise gegen 0 konvergente gleichgradig stetige Netz $(f_\kappa;\ \kappa \in K)$ in $(E,\mathcal{T})'$ gilt $f_\kappa(x) \longrightarrow 0$ gleichmäßig auf A.

(h) Ist B eine abzählbare Teilmenge von A, $F := \overline{[B]}^{\mathcal{T}}$ und $(f_n;\ n \in \mathbb{N})$ eine gleichgradig stetige Folge in $(E,\mathcal{T})'$ mit $f_n(x) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ für alle $x \in F$, so gilt $f_n(x) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig auf B. ($[B]$ bezeichnet den linearen Spann von B.)

(i) A ist beschränkt und es gilt $\mathcal{U}_0(\sigma(E',E)) \cap U^0 \supset \mathcal{U}_0(\mathcal{F}(A)) \cap U^0$ für alle $U \in \mathcal{U}_0(E)$. Dabei ist $\mathcal{F}(A)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf A.

(j) A ist beschränkt und es gilt $\mathfrak{U}_0(\sigma(E,E'))\cap A \supset \mathfrak{U}_0(\tau)\cap A$.

(k) A ist beschränkt und für jedes $U\in\mathfrak{U}_0(\tau)$ ist U^0 $\mathcal{F}(A)$-präkompakt.

Beweis:

(b) $\Longrightarrow$ (a): Man wähle $\lambda_\iota = 1$ $(\iota\in I)$.

(a) $\Longrightarrow$ (b): Sei $(\lambda_\iota;\iota\in I)\in l^\infty(I)$, $a:=\sup\{|\lambda_\iota|;\iota\in I\}$. $(x_\iota;\iota\in I)$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung $\Longrightarrow$ $A:=\$[x](\mathcal{F}(I))$ ist präkompakt $\Longrightarrow$ $\Gamma(A)$ ist präkompakt, da (E,τ) lokalkonvex ist. Mit $S[\lambda x](\mathcal{F}(I))\subset a\cdot\{\sum_{\iota\in\sigma}\mu_\iota x_\iota;\ \sigma\in\mathcal{F}(I),\ |\mu_\iota|\leq 1\ (\iota\in\sigma)\}\subset 4a\cdot\Gamma(A)$ nach (1.13b) folgt: $(\lambda_\iota x_\iota;\iota\in I)$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung.

(a) $\Longrightarrow$ (c): Zu $U\in\mathfrak{U}_0(E)$ existiert $V\in\mathfrak{U}_0(E)$, V absolutkonvex und abgeschlossen, $4V\subset U$. Nach (a) gibt es zu V ein $\sigma\in\mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft: $\tau\in\mathcal{F}(I)$, $\tau\cap\sigma=\emptyset \Longrightarrow \$[x](\tau)\in V = V^{00}$ $\Longrightarrow$ $|\langle\sum_{\iota\in\tau}x_\iota,x'\rangle|\leq 1$ für alle $x'\in V^0$ $\Longrightarrow$ $\sum_{\iota\in\tau}|\langle x',x_\iota\rangle|\leq 4$ für alle $x'\in V^0$, $\tau\in\mathcal{F}(I)$, $\tau\cap\sigma=\emptyset$ (vgl. PIETSCH[98, p. 18]) $\Longrightarrow$ $\sum_{\iota\in\tau}|\langle x',x_\iota\rangle|\leq 1$ für alle $x'\in 4^{-1}V^0=(4V)^0$, $\tau\in\mathcal{F}(I)$, $\tau\cap\sigma=\emptyset$. Wegen $4\cdot V\subset U \Longrightarrow U^0\subset(4\cdot V)^0$ gilt obige Ungleichung insbesondere für alle $x'\in U^0$.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Sei $U\in\mathfrak{U}_0(E)$, o.E. U absolutkonvex und abgeschlossen, d.h. $U=U^{00}$. Nach (c) gibt es ein $\sigma\in\mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft: $\tau\in\mathcal{F}(I)$, $\tau\cap\sigma=\emptyset \Longrightarrow \sum_{\iota\in\tau}|\langle x',x_\iota\rangle|\leq 1$ für alle $x'\in U^0$. $\Longrightarrow$ $|\langle\sum_{\iota\in\tau}x_\iota,x'\rangle|\leq\sum_{\iota\in\tau}|\langle x',x_\iota\rangle|\leq 1$ für alle $x'\in U^0$. $\Longrightarrow$ $(\sum_{\iota\in\tau}x_\iota)\in U^{00}=U$ für alle $\tau\in\mathcal{F}(I)$ mit $\tau\cap\sigma=\emptyset$. $\Longrightarrow (x_\iota;\iota\in I)$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung.

(a) $\Longrightarrow$ (d): Folgt unmittelbar aus (1.13b) und (1.9).

(d) $\Longrightarrow$ (a): Folgt aus (1.9). Für $\sigma\in\mathcal{F}(I)$ sei $|\sigma|:=\mathrm{card}(\sigma)$.

(a) $\Longrightarrow$ (e): Sei $M\subset\mathbb{K}^{(I)}$ gleichmäßig beschränkt und $k\in\mathbb{N}$ mit $\sup\{|\lambda_\iota|;\iota\in I\}\leq k$ für alle $\lambda\in M$ gewählt; $V\in\mathfrak{U}_0(E)$ sei absolutkonvex und abgeschlossen. Da $(x_\iota;\iota\in I)$ die CAUCHY-Bedingung erfüllt, gibt es zu $(16\cdot k)^{-1}\cdot V$ ein $\sigma\in\mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft: $\tau\in\mathcal{F}(I)$, $\tau\cap\sigma=\emptyset \Longrightarrow \sum_{\iota\in\tau}x_\iota\in(16\cdot k)^{-1}\cdot V$. Mit (1.13b) erhält man daraus $\sum_{\iota\in I\setminus\sigma}\lambda_\iota x_\iota\in 4k\cdot(16\cdot k)^{-1}\cdot V=4^{-1}\cdot V$ für alle $\lambda\in M$. $\lambda_\iota\longmapsto\lambda_\iota x_\iota$ ist stetig in 0, also gibt es zu $(2\cdot|\sigma|)^{-1}\cdot V$ ein $U_\iota\in\mathfrak{U}_0(\mathbb{K})$ mit $\lambda_\iota\in U_\iota \Longrightarrow \lambda_\iota\cdot x_\iota\in(2\cdot|\sigma|)^{-1}\cdot V$ $(\iota\in\sigma)$. Für $\iota\notin\sigma$ setzen wir $U_\iota:=\mathbb{K}$. $U:=(\prod_{\iota\in I}U_\iota)\cap\mathbb{K}^{(I)}$. Seien jetzt $\lambda,\mu\in M$, $\lambda-\mu\in U \Longrightarrow \$[x](\lambda)-\$[x](\mu)=\$[x](\lambda-\mu)=\sum_{\iota\in\sigma}(\lambda_\iota-\mu_\iota)x_\iota+\sum_{\iota\in I\setminus\sigma}(\lambda_\iota-\mu_\iota)x_\iota\in\sum_{\iota\in\sigma}(2\cdot|\sigma|)^{-1}\cdot V+2^{-1}\cdot V=V \Longrightarrow \$[x]|M$ ist gleichmäßig stetig.

<u>(e)$\Longrightarrow$(a):</u> $M_1 := \{\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}; |\lambda_\iota| \leq 1 \ (\iota \in I)\}$ ist präkompakt in $\mathbb{K}^{(I)}$, $\$[x]|M_1$ ist gleichmäßig stetig $\Longrightarrow$ $\$[x](M_1)$ ist präkompakt in $(E,\mathcal{T})$. Mit (1.9) folgt daraus die Behauptung.

<u>(d)$\Longleftrightarrow$(f):</u> Dies ist unmittelbar zu sehen.

Da A absolutkonvex ist, ist die durch eine lokalkonvexe Topologie auf A induzierte Uniformität nach GROTHENDIECK[57, p. 134] bereits durch den relativen Nullumgebungsfilter bestimmt. Mit dieser Bemerkung und Lemma 3 aus GROTHENDIECK[57, p. 133] ersieht man die Äquivalenz der Aussagen (d), (i), (j) und (k). Für die Äquivalenz von (i) und (j) beachte man dabei, daß $\mathcal{T}$ die Initialtopologie bezüglich $id_E: E \longrightarrow (E, \mathcal{F}(U^o))$ $(U \in \mathcal{U}_o(E,\mathcal{T}))$ ist, wobei $\mathcal{F}(U^o)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf U^o bezeichnet.

<u>(g)$\Longrightarrow$(i):</u> A ist beschränkt, denn: Sei $(a_n; n \in \mathbb{N})$ eine Folge in A, $(\varepsilon_n; n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge in $\mathbb{K}$ und $f \in (E,\mathcal{T})'$. Dann ist $(\varepsilon_n f; n \in \mathbb{N})$ eine gleichgradig stetige Folge in $(E,\mathcal{T})'$, die punktweise gegen Null konvergiert. Also gilt $\varepsilon_n f(a) \longrightarrow 0$ gleichmäßig in $a \in A$, insbesondere gilt $f(\varepsilon_n a_n) \longrightarrow 0$. Daraus folgt die Beschränktheit von A mit KÖTHE[80, p. 156, 6.(3)] . Die Aussage (g) bedeutet nun gerade daß $id_{U^o} : (U^o, \sigma(E',E) \cap U^o) \longrightarrow (U^o, \mathcal{F}(A) \cap U^o)$ für jedes $U \in \mathcal{U}_o(E,\mathcal{T})$ in Null stetig ist. Also gilt für die relativen Nullumgebungsfilter $\mathcal{U}_o(\sigma(E',E)) \cap U^o \supset \mathcal{U}_o(\mathcal{F}(A)) \cap U^o$.

<u>(i)$\Longrightarrow$(g):</u> Dies ist unmittelbar zu sehen.

<u>(g)$\Longleftrightarrow$(h):</u> A ist genau dann $\mathcal{T}$-präkompakt, wenn jede abzählbare Teilmenge B von A $\mathcal{T}$-präkompakt ist (vgl. (1.14)). Mit $F := \overline{[B]}^{\mathcal{T}}$ gilt: B ist genau dann präkompakt in $(E,\mathcal{T})$, wenn B in $(F, \mathcal{T} \cap F)$ präkompakt ist. Wegen "(i)$\Longleftrightarrow$(g)" und GROTHENDIECK[57, p. 133, Lemma 3] ist (g) ein allgemeines Präkompaktheitskriterium in lokalkonvexen Räumen. Man erhält also: B ist genau dann präkompakt in $(F, \mathcal{T} \cap F)$, wenn jedes punktweise gegen Null konvergente gleichgradig stetige Netz $(f_\kappa; \kappa \in K)$ in $(F, \mathcal{T} \cap F)'$ auf B gleichmäßig gegen Null konvergiert. Da $(F, \mathcal{T} \cap F)$ separabel ist, sind in $(F', \sigma(F',F))$ die gleichgradig stetigen Teilmengen metrisierbar (KÖTHE[80, p. 261, (4)]). In obiger Aussage kann man sich daher auf gleichgradig stetige Folgen $(f_n; n \in \mathbb{N})$ in F' beschränken. Die folgende Abschätzung zeigt, daß man die gleichgradig stetigen Teilmengen von F' genau als Einschränkung gleichgradig stetiger Teilmengen von $(E,\mathcal{T})'$ erhält.

Zu $V \in \mathcal{U}_o(F, \mathcal{T} \cap F)$ existieren $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_o(E,\mathcal{T})$, U_1, U_2 absolutkonvex und abgeschlossen mit $U_1 \cap F \subset V \subset U_2 \cap F$. $\Longrightarrow$ $(U_2 \cap F)^o = \overline{\Gamma(U_2^o \cup F^o)} \subset V^o \subset (U_1 \cap F)^o = \overline{\Gamma(U_1^o \cup F^o)}$ (KÖTHE[80,

p. 249 (10)]). Da $F^o = F^\perp$ abgeschlossen ist und U_1^o, U_2^o $\sigma(E',E)$-kompakt sind, sind $F^\perp + U_1^o$ und $F^\perp + U_2^o$ abgeschlossen. Man erhält also $2^{-1}(U_2^o + F^\perp) \subset V^o \subset U_1^o + F^\perp$. Damit folgt die Äquivalenz von (g) und (h). ./.

(1.17) Bemerkungen.

(a) Weitere Kriterien für Summierbarkeit bzw. für das Erfülltsein der CAUCHY-Bedingung in lokalkonvexen Räumen findet man bei BOËL, DUHOUX[21].

(b) Die ÄQUIVALENZEN (d)$\Longleftrightarrow$(g)$\Longleftrightarrow$(h) in Satz (1.16) wurden zuerst von PFISTER (unveröffentlicht) als allgemeine Kriterien für Präkompaktheit in lokalkonvexen Räumen bewiesen.

(c) Bei ROBERTSON[103, p. 149] wird gezeigt, daß (1.16a) und (1.16b) auch in lokal pseudo-konvexen Räumen äquivalent sind. Für die Definition von "lokal pseudo-konvex" und die Äquivalenz zu dem von ROBERTSON verwendeten Begriff "semi-konvex" vergleiche man WAELBROECK[133, p. 6]. Zu jeder p-Halbnorm q (mit $p \in (0,1]$) auf einem $\mathbb{K}$-linearen Raum E gibt es eine Konstante $C_p > 0$, so daß für jede Familie $(x_\iota; \iota \in I)$ in E und jedes $\tau \in \mathcal{F}(I)$ die Abschätzung

$$\sup\{q(\sum_{\iota\in\tau} \lambda_\iota x_\iota);\ 0 \leq \lambda_\iota \leq 1\ (\iota\in\tau)\} \leq C_p \cdot \sup\{q(\sum_{\iota\in\tau} \varepsilon_\iota x_\iota);\ \varepsilon_\iota \in \{0,1\}\ (\iota\in\tau)\}$$

erfüllt ist (vgl. etwa ROLEWICZ, RYLL-NARDZEWSKI[111, p. 327]). Aus dem Beweis von "(a) $\Longrightarrow$ (e)" in Satz (1.16) ersieht man damit, daß (1.16a) und (1.16e) auch in lokal pseudo-konvexen Räumen äquivalent sind. Zusammen erhält man damit aus dem Beweis zu Satz (1.16), daß die Aussagen (a), (b), (d), (e) und (f) aus Satz (1.16) auch in lokal pseudo-konvexen Räumen äquivalent sind.

(d) Ein topologischer linearer Raum $(E,\mathcal{T})$ hat die Eigenschaft $P(\lambda_n;\ n\in\mathbb{N})$ für eine Folge $(\lambda_n;\ n\in\mathbb{N})$ in $\mathbb{R}$, wenn es zu jedem $U \in \mathcal{U}_o(E)$ ein $V \in \mathcal{U}_o(E)$ so gibt, daß $\lambda_1 V + \lambda_2 V + \ldots + \lambda_n V \subset U$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt. Bei ROLEWICZ[110, p. 91] wird gezeigt, daß (1.16a) und (1.16b) auch in topologischen linearen Räumen mit der Eigenschaft $P(2^{-n};n\in\mathbb{N})$ äquivalent sind. Die dort vorausgesetzte Vollständigkeit und Metrisierbarkeit wird zum Beweis dieser Aussage nicht benötigt.

(e) Bei ROLEWICZ, RYLL-NARDZEWSKI[111] wird ein vollständig metrisierbarer topologischer linearer Raum konstruiert, in dem (1.16a) und (1.16b) nicht äquivalent sind. Mit dem Beweis zu Satz (1.16) sieht man, daß in diesem Raum auch keine der Aussagen (1.16f), (1.16e), (1.16d) zu (1.16a) äquivalent sein kann.

(f) Die topologischen linearen Räume, für die (1.16a) und (1.16b)

äquivalent sind, wurden kürzlich von LABUDA[88] charakterisiert.

Bemerkung (1.17e) gibt Anlaß zu der folgenden Definition.

<u>(1.18) Definition.</u> Sei $(E,\mathcal{T})$ ein topologischer linearer Raum, $(x_\iota;\iota\in I)$ eine Familie in E und $\Lambda\subset\mathbb{K}^I$ ein linearer Teilraum.

(a) $(x_\iota;\iota\in I)$ erfüllt die Λ -CAUCHY-Bedingung, wenn $(\lambda_\iota x_\iota;\iota\in I)$ für alle $\lambda\in\Lambda$ die CAUCHY-Bedingung erfüllt.
(b) $(x_\iota;\iota\in I)$ heißt Λ -summierbar, wenn $(\lambda_\iota x_\iota;\iota\in I)$ für alle $\lambda\in\Lambda$ summierbar ist.

Als besonders wichtig erweisen sich in diesem Zusammenhang folgende Teilräume von $\mathbb{K}^I$:

$$m_o(I):=\{x\colon I\longrightarrow\mathbb{K};\ x(I)\text{ ist endlich}\},$$
$$l^\infty(I):=\{x\colon I\longrightarrow\mathbb{K};\ x(I)\text{ ist beschränkt}\},$$
$$l^p(I):=\{x\colon I\longrightarrow\mathbb{K};\ \sum_{\iota\in I}|x(\iota)|^p<\infty\}\quad(0<p<\infty),$$
$$c_o(I):=\{x\colon I\longrightarrow\mathbb{K};\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \sigma\in\mathcal{F}(I)\text{ mit }|x(\iota)|<\varepsilon\ \forall\iota\notin\sigma\}.$$

Dem Begriff "$m_o(I)$-summierbar" entspricht offenbar gerade der in (1.1c) eingeführte Begriff der "TF-Summierbarkeit". Wir behalten in diesem Fall die zuerst eingeführte Bezeichnung bei.

Für "$l^\infty(I)$-summierbar" ist in der Literatur die Bezeichnung "BM-summierbar" ("Beschränkte Multiplikatoren", siehe etwa ROLEWICZ [110, p. 88]) üblich. Wir übernehmen diese Bezeichnung.

Eine Folge $(x_n;\ n\in\mathbb{N})$, die $c_o(\mathbb{N})$-summierbar ist, wird bei SCHWARTZ[116, p. 704] C-Folge genannt.

Die folgenden Sätze charakterisieren die Familien, die die $c_o(I)$- bzw. die $l^\infty(I)$-CAUCHY-Bedingung erfüllen.

<u>(1.19) Satz.</u> Für eine Familie $(x_\iota;\iota\in I)$ in einem topologischen linearen Raum $(E,\mathcal{T})$ sind äquivalent:
(a) $(x_\iota;\iota\in I)$ erfüllt die $c_o(I)$-CAUCHY-Bedingung.
(b) $A:=\{\sum_{\iota\in\sigma}a_\iota x_\iota;\ |a_\iota|\leq 1\ \ (\iota\in\sigma),\ \sigma\in\mathcal{F}(I)\}$ ist beschränkt.
(c) Die durch $T(e_\iota):=x_\iota\ \ (\iota\in I)$ definierte lineare Abbildung $T\colon(\mathbb{K}^{(I)},\|\cdot\|_\infty)\longrightarrow(E,\mathcal{T})$ ist stetig. (Dabei ist $e_\iota\colon I\longrightarrow\mathbb{K}$ durch $e_\iota(\kappa):=\delta_{\iota\kappa}\ \ (\iota,\kappa\in I)$ definiert.)
(d) $\Gamma(\$[x](\mathcal{F}(I)))$ ist beschränkt.

<u>Beweis:</u>
<u>(a)$\Longrightarrow$(b):</u> (siehe ROLEWICZ[110, p. 100]). Wir nehmen an, daß A nicht beschränkt ist. Dann gibt es eine Folge $(\sigma_n;\ n\in\mathbb{N})$ in $\mathcal{F}(I)$

mit $\sigma_k \cap \sigma_l = \emptyset$ $(k \neq l)$, Skalare $a_{n,\iota}$, $|a_{n,\iota}| \leq 1$ $(\iota \in \sigma_n,\ n \in \mathbb{N})$ und eine Nullfolge $(t_n; n \in \mathbb{N})$ in $\mathbb{K}$, so daß $(t_n \sum_{\iota \in \sigma_n} a_{n,\iota} x_\iota; n \in \mathbb{N})$ keine Nullfolge ist. Wir setzen $c_\iota := t_n \cdot a_{n,\iota}$ $(\iota \in \sigma_n)$, $c_\iota := 0$ $(\iota \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n)$. Dann gilt $(c_\iota; \iota \in I) \in c_0(I)$ und $(c_\iota x_\iota; \iota \in I)$ erfüllt nach (1.5f) nicht die CAUCHY-Bedingung.

<u>(b)$\Longrightarrow$(a):</u> (siehe ROLEWICZ[110, p. 100]). Sei A beschränkt, $(\lambda_\iota; \iota \in I) \in c_0(I)$ und $U \in \mathcal{U}_0(E)$ kreisförmig. Dann gibt es ein $\sigma \in \mathcal{F}(I)$ mit $\lambda_\iota x \in U$ für alle $\iota \notin \sigma$, $x \in A$. Für alle $\tau \in \mathcal{F}(I)$ mit $\tau \cap \sigma = \emptyset$ gilt dann mit $\lambda_\tau := \max\{|\lambda_\iota|; \iota \in \tau\}$: $\sum_{\iota \in \tau} \lambda_\iota x_\iota = \lambda_\tau \cdot \sum_{\iota \in \tau} \frac{\lambda_\iota}{\lambda_\tau} x_\iota \in U$, denn es ist $\lambda_\tau = |\lambda_\iota|$ für ein $\iota \notin \sigma$ und $(\sum_{\iota \in \tau} \frac{\lambda_\iota}{\lambda_\tau} x_\iota) \in A$.

<u>(b)$\Longleftrightarrow$(c)</u> ist unmittelbar zu sehen.

<u>(b)$\Longleftrightarrow$(d)</u> folgt aus (1.13). ./.

Auf Familien $(x_\iota; \iota \in I)$, die die $c_0(I)$-CAUCHY-Bedingung erfüllen, werden wir in §3 nochmals zurückkommen.

<u>(1.20) Satz.</u> Für eine Familie $(x_\iota; \iota \in I)$ in einem topologischen linearen Raum $(E, \mathcal{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $(x_\iota; \iota \in I)$ erfüllt die $l^\infty(I)$-CAUCHY-Bedingung.

(b) Zu jedem $U \in \mathcal{U}_0(E, \mathcal{R})$ existiert ein $\sigma \in \mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft: $\tau \in \mathcal{F}(I)$, $\tau \cap \sigma = \emptyset$, $\lambda_\iota \in \mathbb{K}$, $|\lambda_\iota| \leq 1$ $(\iota \in \tau) \Longrightarrow \sum_{\iota \in \tau} \lambda_\iota x_\iota \in U$.

(c) $\$[x]: \mathbb{K}^{(I)} \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ ist auf gleichmäßig beschränkten Mengen gleichmäßig stetig. (Dabei sei $\mathbb{K}^{(I)}$ mit der vom Produkt $\mathbb{K}^I$ induzierten Topologie versehen.)

(d) $A := \{\sum_{\iota \in \sigma} \lambda_\iota x_\iota;\ \sigma \in \mathcal{F}(I), |\lambda_\iota| \leq 1\ (\iota \in \sigma)\}$ ist präkompakt in $(E, \mathcal{R})$.

(e) Die durch $T(e_\iota) := x_\iota$ $(\iota \in I)$ definierte lineare Abbildung $T: (\mathbb{K}^{(I)}, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ ist präkompakt.

(f) $\Gamma(\$[x](\mathcal{F}(I)))$ ist präkompakt.

(g) $\Gamma(\$[x](\mathcal{F}(I)))$ ist beschränkt und $\$[x](\mathcal{F}(I))$ ist präkompakt.

<u>Beweis:</u>

<u>(a)$\Longrightarrow$(b):</u> Ist (b) nicht erfüllt, so gibt es ein $U \in \mathcal{U}_0(E, \mathcal{R})$, eine Folge $(\tau_n; n \in \mathbb{N})$ in $\mathcal{F}(I)$ mit $\tau_n \cap \tau_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Skalare $a_{n,\iota} \in \mathbb{K}$, $|a_{n,\iota}| \leq 1$ $(\iota \in \tau_n)$, so daß $\sum_{\iota \in \tau_n} a_{n,\iota} x_\iota \notin U$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt. Definiert man $\lambda_\iota := a_{n,\iota}$ $(\iota \in \tau_n)$, $\lambda_\iota := 0$ $(\iota \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n)$, so gilt $|\lambda_\iota| \leq 1$ $(\iota \in I)$ und die Familie $\lambda x := (\lambda_\iota x_\iota; \iota \in I)$ erfüllt nach (1.5f) nicht die CAUCHY-Bedingung, denn es ist $\$[\lambda x](\tau_n) \notin U$ $(n \in \mathbb{N})$ nach Konstruktion.

<u>(b)$\Longrightarrow$(c):</u> Sei $M \subset \mathbb{K}^{(I)}$ gleichmäßig beschränkt, $a := \sup\{|\lambda_\iota|; (\lambda_\iota; \iota \in I) \in M\} > 0$, und $U \in \mathcal{U}_0(E, \mathcal{R})$ sei vorgegeben. Zu $U \in \mathcal{U}_0(E, \mathcal{R})$

gibt es ein $V \in \mathfrak{U}_0(E,\mathfrak{R})$, V kreisförmig, mit $V + V + V \subset U$. Zu $a^{-1}V$ gibt es nach (b) ein $\sigma \in \mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft: $\tau \in \mathcal{F}(I)$, $\tau \cap \sigma = \emptyset$, $\lambda_\iota \in \mathbb{K}$, $|\lambda_\iota| \leq 1$ $(\iota \in \tau) \Longrightarrow \sum_{\iota\in\tau} \lambda_\iota x_\iota \in a^{-1}V$. Damit gilt: $\lambda \in M$, $\tau \in \mathcal{F}(I)$, $\tau \cap \sigma = \emptyset \Longrightarrow \sum_{\iota\in\tau} \lambda_\iota x_\iota = a \sum_{\iota\in\tau} a^{-1}\lambda_\iota x_\iota \in a \cdot a^{-1}V = V$. Zu $V \in \mathfrak{U}_0(E,\mathfrak{R})$ gibt es ein $W \in \mathfrak{U}_0(E,\mathfrak{R})$, W kreisförmig, mit $W+\ldots+W \subset V$ (card(σ) Summanden). Da $\lambda \longmapsto \lambda \cdot x_\iota$ stetig ist, gibt es zu $W \in \mathfrak{U}_0(E,\mathfrak{R})$ ein $U_\iota \in \mathfrak{U}_0(\mathbb{K})$ mit $\lambda_\iota \in U_\iota \Longrightarrow \lambda_\iota x_\iota \in W$ $(\iota \in \sigma)$. Für $\iota \in I \setminus \sigma$ sei $U_\iota := \mathbb{K}$ gesetzt. Für $\lambda, \mu \in M$ mit $\lambda - \mu \in U_1 := (\prod_{\iota\in I} U_\iota) \cap \mathbb{K}^{(I)}$ gilt dann: $\$[x](\lambda) - \$[x](\mu) = \$[x](\lambda - \mu) = \sum_{\iota\in\sigma}(\lambda_\iota - \mu_\iota)x_\iota + \sum_{\iota\in I\setminus\sigma} \lambda_\iota x_\iota - \sum_{\iota\in I\setminus\sigma} \mu_\iota x_\iota \in W + \ldots + W + V + V \subset U. \Longrightarrow \$[x]|M$ ist gleichmäßig stetig.

<u>(c) $\Longrightarrow$ (d):</u> $M_1 := \{\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}; |\lambda_\iota| \leq 1 \ (\iota \in I)\}$. M_1 ist gleichmäßig beschränkt und die vom Produkt $\mathbb{K}^I$ auf M_1 induzierte Uniformität ist präkompakt. Nach (c) ist $\$[x]|M_1$ gleichmäßig stetig. $\Longrightarrow$ $A = \$[x](M_1)$ ist präkompakt in $(E,\mathfrak{R})$.

<u>(d) $\Longleftrightarrow$ (e)</u> ist unmittelbar zu sehen.

<u>(d) $\Longleftrightarrow$ (f)</u> folgt mit (1.13b).

<u>(d) $\Longrightarrow$ (a)</u> erhält man mit Satz (1.9).

<u>(f) $\Longrightarrow$ (g)</u> ist unmittelbar zu sehen.

<u>(g) $\Longrightarrow$ (a):</u> O.E. sei $(E,\mathfrak{R})$ separiert und vollständig. Wir definieren folgende Abbildungsfamilie: $T_\sigma: l^\infty(I) \longrightarrow E$, $\lambda \longmapsto \sum_{\iota\in\sigma} \lambda_\iota x_\iota$ $(\sigma \in \mathcal{F}(I))$. Da $\Gamma(\$[x](\mathcal{F}(I)))$ beschränkt ist, ist $(T_\sigma; \sigma \in \mathcal{F}(I))$ punktweise beschränkt. Weiterhin ist $T_\sigma: (l^\infty(I), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E,\mathfrak{R})$ stetig für alle $\sigma \in \mathcal{F}(I)$. Da $(l^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$ als BANACH-Raum auch linear-tonneliert ist, ist $(T_\sigma; \sigma \in \mathcal{F}(I))$ gleichgradig stetig (vgl. WAELBROECK[133, p. 10]). Wegen der Vollständigkeit von $(E,\mathfrak{R})$ und der Präkompaktheit von $\$[x](\mathcal{F}(I))$ ist $(T_\sigma; \sigma \in \mathcal{F}(I))$ auf $m_0(I)$ punktweise konvergent, und aus der Dichtheit von $m_0(I)$ in $(l^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$, der Vollständigkeit von $(E,\mathfrak{R})$ und der gleichgradigen Stetigkeit von $(T_\sigma; \sigma \in \mathcal{F}(I))$ folgt, daß $(T_\sigma; \sigma \in \mathcal{F}(I))$ auf $l^\infty(I)$ punktweise konvergent ist. D.h. $(x_\iota; \iota \in I)$ ist BM-summierbar. ./.

Die Aussage (1.20b) verdanke ich einem Hinweis von Herrn VOIGT. Die BM-Summierbarkeit einer Familie $(x_\iota; \iota \in I)$ in einem separierten topologischen linearen Raum kann man nun wie folgt charakterisieren.

<u>(1.21) Satz.</u> Für eine Familie $(x_\iota; \iota \in I)$ in einem separierten topologischen linearen Raum $(E,\mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Für jedes $\lambda \in l^\infty(I)$ ist $(\lambda_\iota x_\iota; \iota \in I)$ summierbar.

(b) $D := \{\sum_{\iota\in\sigma} \lambda_\iota x_\iota; \sigma \in \mathcal{F}(I), |\lambda_\iota| \leq 1\}$ ist relativ kompakt in $(E,\mathcal{T})$.

Ist (a) oder (b) erfüllt, so ist $\{\sum_{\iota\in I} \lambda_\iota x_\iota; |\lambda_\iota| \leq 1\}$ kompakt.

Beweis: Mit Satz (1.11) erhält man "(b) $\Longrightarrow$ (a)".
(a) $\Longrightarrow$ (b): Da $(x_\iota;\iota\in I)$ insbesondere die $l^\infty(I)$-CAUCHY-Bedingung erfüllt, ist nach (1.20c) die Abbildung $\$[x]: \mathbb{K}^{(I)} \longrightarrow (E,\gamma)$ auf gleichmäßig beschränkten Mengen gleichmäßig stetig. Sei $M:=\{\lambda\in\mathbb{K}^{(I)};|\lambda_\iota|\leq 1\ (\iota\in I)\}$. Dann ist $\$[x]|M: M \longrightarrow (E,\gamma)$ gleichmäßig stetig. Es existiert daher genau eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $\tilde{\$}: \overline{M}^{\mathbb{K}^I} \longrightarrow (\tilde{E},\tilde{\gamma})$ in die vollständige Hülle $(\tilde{E},\tilde{\gamma})$ von (E,γ). Aus der Kompaktheit von $M_1:=\overline{M}^{\mathbb{K}^I}$ folgt die Kompaktheit von $\tilde{\$}(M_1)$ in $(\tilde{E},\tilde{\gamma})$. Wegen (a) und Lemma (1.7) liegt aber $\tilde{\$}(M_1)$ schon in E. Also ist (b) erfüllt. Mit $\tilde{\$}(M_1)=\{\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota x_\iota;|\lambda_\iota|\leq 1\ (\iota\in I)\}$ erhält man die Kompaktheit dieser Menge. ./.

(1.22) Korollar. Ist (E,γ) ein separierter lokalkonvexer Raum und $(x_\iota;\iota\in I)$ eine $\sigma(E,E')$-BM-summierbare Familie in E, so ist $D:=\{\sum_{\iota\in\sigma}\lambda_\iota x_\iota;\ \sigma\in\mathcal{F}(I),|\lambda_\iota|\leq 1\ (\iota\in\sigma)\}$ beschränkt bezüglich $\beta(E,E')$.
Beweis: Nach (1.21) ist $\overline{D}$ eine absolutkonvexe $\sigma(E,E')$-kompakte Menge und daher nach KÖTHE[80, p. 254 (3)] $\beta(E,E')$-beschränkt. ./.

(1.23) Bemerkungen. Sei I eine unendliche Indexmenge.
(a) Sei $E:=\mathbb{K}^{(I)}+[e]$, wobei $e:I\longrightarrow\mathbb{K}$ durch $e(\iota):=1\ (\iota\in I)$ definiert ist. γ sei die vom Produkt $\mathbb{K}^I$ auf E induzierte Topologie. In (E,γ) ist die Familie $(e_\iota;\iota\in I)$ mit $e_\iota(\kappa):=\delta_{\iota\kappa}$ $(\iota,\kappa\in I)$ summierbar zur Summe e. $(e_\iota;\iota\in I)$ ist jedoch nicht TF-summierbar.
(b) Im Raum $(m_o(I),\sigma(m_o(I),l^1(I)))$ ist $(e_\iota;\iota\in I)$ TF-summierbar. Der folgende Satz zeigt unter anderem, daß $(e_\iota;\iota\in I)$ in $(m_o(I),\sigma(m_o(I),l^1(I)))$ nicht BM-summierbar ist.
Damit ist gezeigt, daß die Begriffe "summierbar", "TF-summierbar" und "BM-summierbar" echt verschieden sind.

(1.24) Satz (BATT, DIEROLF, VOIGT[16, Th. 1]).
Sei I eine unendliche Menge. $(x_n;n\in\mathbb{N})$ sei eine Folge in $m_o(I)$, für die eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:
(a) $(x_n;n\in\mathbb{N})$ ist BM-summierbar bezüglich $\sigma(m_o(I),\mathbb{K}^{(I)})$.
(b) $(x_n;n\in\mathbb{N})$ ist TF-summierbar bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Topologie auf $m_o(I)$.
Dann ist der lineare Spann $[x_n;n\in\mathbb{N}]$ der Folge $(x_n;n\in\mathbb{N})$ endlich dimensional.

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt und nehmen $\dim[x_n;n\in\mathbb{N}]=\infty$ an. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei $\mathfrak{A}_n$ eine endliche Partition von I, die

alle Partitionen, die durch die Elemente $x_1,\dots,x_n \in m_o(I)$ induziert werden, verfeinert. Da der lineare Spann $[\chi_A;\ A \in \mathfrak{A}_n]$ der charakteristischen Funktionen χ_A der Mengen aus $\mathfrak{A}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich dimensional ist, können wir o.E. $x_{n+1} \notin [\chi_A;\ A \in \mathfrak{A}_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ und $x_1 \neq 0$ annehmen. Denn mit $(x_n;\ n \in \mathbb{N})$ erfüllt auch jede Teilfolge die Voraussetzung (a) bzw. (b). Wir zeigen, daß $(x_n; n \in \mathbb{N})$ weder (a) noch (b) erfüllen kann. Dazu konstruieren wir zunächst eine Folge $(\lambda_n;\ n \in \mathbb{N})$ in $l^\infty(\mathbb{N})$ so daß $(\lambda_n x_n;\ n \in \mathbb{N})$ nicht $\sigma(m_o(I), \mathbb{K}^{(I)})$-summierbar ist. Diese Folge wird zusammen mit einer Folge $(\alpha_n; n \in \mathbb{N})$ in $\mathbb{R}^+$ definiert. Wir setzen $s_n := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Sei $\lambda_1 := 2^{-1} \cdot \min\{1, \|x_1\|_\infty^{-1}\}$; für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir induktiv:

$$\alpha_n := \begin{cases} 1 & \text{für } \operatorname{card}(s_n(I)) = 1 \\ 3^{-1}\min\{|r-r'|\ ;\ r,r' \in s_n(I),\ r \neq r'\} & \text{für } \operatorname{card}(s_n(I)) \geq 2, \end{cases}$$

$$\lambda_{n+1} := 2^{-(n+1)} \min\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cdot \min\{1, \|x_{n+1}\|_\infty^{-1}\}\ .$$

Unmittelbar aus der Definition der Folgen $(\lambda_n; n \in \mathbb{N})$ und $(\alpha_n; n \in \mathbb{N})$ ersieht man, daß für $n \in \mathbb{N}$

(1) die offenen Kugeln $K(r,\alpha_n) := \{z \in \mathbb{K};\ |z - r| < \alpha_n\}$, $r \in s_n(I)$, paarweise disjunkt sind.

(2) für alle $\iota \in I$ die Abschätzung $|s_{n+1}(\iota) - s_n(\iota)| \leq \|\lambda_{n+1} x_{n+1}\|_\infty < \alpha_n$ gilt, so daß insbesondere für alle $r \in s_n(I)$ die Kugel $K(r,\alpha_n)$ mindestens einen Punkt aus $s_{n+1}(I)$ enthält.

Durch Induktion zeigen wir:

(3) $\operatorname{card}(s_n(I)) \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Mit (1) und (2) erhält man aus der Induktionsvoraussetzung, daß es mindestens n paarweise disjunkte Kugeln $K(r,\alpha_n)$, $r \in s_n(I)$ gibt, und daß jede dieser Kugeln mindestens einen Punkt aus $s_{n+1}(I)$ enthält. Wegen $x_{n+1} \notin [\chi_A;\ A \in \mathfrak{A}_n]$ gibt es ein $A_o \in \mathfrak{A}_n$ mit $\operatorname{card}(x_{n+1}(A_o)) \geq 2$. Für $\iota \in A_o$ enthält deshalb die Kugel $K(s_n(\iota),\alpha_n)$ mindestens zwei Punkte von $s_{n+1}(I)$. Damit folgt $\operatorname{card}(s_{n+1}(I)) \geq \operatorname{card}(s_n(I)) + 1 \geq n + 1$. Wegen $\|\lambda_n x_n\|_\infty \leq 2^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist die Folge $(\lambda_n x_n; n \in \mathbb{N})$ in $(l^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$ summierbar zur Summe $s := \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n x_n$. Wir zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r \in s_n(I)$ die Kugel $K(r,\alpha_n)$ mindestens einen Punkt aus $s(I)$ enthält. Ist $r = s_n(\iota)$ für ein $\iota \in I$, so gilt

$$|s(\iota) - s_n(\iota)| \leq \sum_{j \geq n+1} \lambda_j \|x_j\|_\infty \leq \sum_{j \geq n+1} 2^{-j} \min\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}\} \leq$$
$$\leq \alpha_n \sum_{j \geq n+1} 2^{-j} \leq 2^{-1} \cdot \alpha_n .$$

$s(I)$ ist also unendlich und damit gilt $s \notin m_o(I)$ im Widerspruch zu (a).

Zum Beweis der Aussage unter der Voraussetzung (b) konstruieren wir eine Teilfolge $n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ so daß $(x_{n(k)}; k \in \mathbb{N})$ nicht in $(m_o(I), \|\cdot\|_\infty)$ summierbar ist. Diese Teilfolge wird zusammen mit einer Folge $(\alpha'_k;\ k \in \mathbb{N})$ in $\mathbb{R}^+$ definiert. Wir setzen $s'_k := \sum_{i=1}^{k} x_{n(i)}$. Aus (b) folgt $\|x_n\|_\infty \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$. Wir können also $n(1) \in \mathbb{N}$ so wählen, daß $\|x_{n(1)}\|_\infty \leq 2^{-1}$ gilt; für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir induktiv

$$\alpha'_k := \begin{cases} 1 & \text{für } \operatorname{card}(s'_k(I)) = 1 \\ 3^{-1}\min\{|r-r'|\ ;\ r,r' \in s'_k(I),\ r \neq r'\} & \text{für } \operatorname{card}(s'_k(I)) \geq 2 \end{cases}$$

und wählen $n(k+1) > n(k)$ so daß

$$\|x_{n(k+1)}\|_\infty \leq 2^{-(k+1)} \min\{1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k\}$$

gilt. Damit erhalten wir die Aussagen (1), (2) und (3) von oben mit k, s'_k und α'_k an Stelle von n, s_n und α_n. Wie oben zeigt man dann, daß $(x_{n(k)}; k \in \mathbb{N})$ nicht in $(m_o(I), \|\cdot\|_\infty)$ summierbar ist und erhält einen Widerspruch zu (b). Damit ist der Satz bewiesen. ./.

<u>(1.25) Bemerkungen.</u>

(a) Die Sätze (1.9) und (1.11) sind für kommutative topologische Gruppen falsch, wie das Beispiel $E := \{0,1\}$, $\mathcal{T} := \operatorname{Pot}(E)$, $x_n := 1$ $(n \in \mathbb{N})$ zeigt. $\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N})) = E$ ist kompakt, trotzdem erfüllt $(x_n; n \in \mathbb{N})$ nicht die CAUCHY-Bedingung.

(b) Bei ROBERTSON[103, p. 155] wird gezeigt: Existiert in der kommutativen separierten topologischen Gruppe $(E, \mathcal{T})$ eine Folge $(x_n;\ n \in \mathbb{N})$, die nicht summierbar ist und für die $\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))$ relativ kompakt ist, so gibt es ein $y \in E \setminus \{0\}$, das eine relativ kompakte Untergruppe erzeugt. Das in (a) genannte Trivial-Beispiel ist also im wesentlichen die einzige Möglichkeit, wie Satz (1.11) für topologische Gruppen falsch werden kann.

(c) Daß man Satz (1.9) nicht in ähnlicher Weise für kommutative separierte topologische Gruppen modifizieren kann, liegt daran, daß bei der Vervollständigung kommutativer separierter topologischer Gruppen kompakte Untergruppen auch dann entstehen können, wenn die Ausgangsgruppe keine nichttriviale präkompakte Untergruppe besaß. Das folgende Beispiel von ROBERTSON[103, p. 156] zeigt diese Situation auf.

<u>(1.26) Beispiel.</u> Sei $T := \mathbb{R}/2\pi$ die Torusgruppe und $\mathbb{R} \times T$ sei mit der Produkttopologie versehen. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sei so gewählt, daß $\alpha/2\pi$ irrational ist. $(a_n; n \in \mathbb{N})$ sei eine Folge in $\mathbb{R}$, die über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist und der Bedingung $0 < a_n < 2^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$ genügt. Sei $\bar{\alpha} := \alpha + 2\pi\mathbb{Z}$. In $\mathbb{R} \times T$ betrachten wir

$G := \{(\sum_{n\in\sigma} k_n a_n, \sum_{n\in\sigma} k_n \bar{\alpha});\ k_n \in \mathbb{Z}\ \ (n\in\mathbb{N}),\ \sigma\in\mathcal{F}(\mathbb{N})\}$.

$(G,+)$ ist offenbar eine Untergruppe von $\mathbb{R}\times T$. Ist $(x,\theta)\in G$ und $x = 0$, so folgt $k_n = 0$ $(n\in\sigma)$, da die Folge $(a_n; n\in\mathbb{N})$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist. Es gilt dann auch $\theta = 0$. Jede von $\{(0,0)\}$ verschiedene Untergruppe H von G enthält daher mindestens ein Element (x,θ) mit $x \neq 0$. Damit enthält H jedoch auch alle Elemente der Form $(nx, n\theta)$ mit $n\in\mathbb{N}$ und ist deshalb nicht präkompakt. G enthält also keine nichttriviale präkompakte Untergruppe. Die Folge $((a_n,\bar{\alpha}); n\in\mathbb{N})$ erfüllt nach (1.5f) nicht die CAUCHY-Bedingung. Trotzdem gilt für jedes $\sigma\in\mathcal{F}(\mathbb{N})$: $\sum_{n\in\sigma}(a_n,\bar{\alpha})\in([0,1]\times T)\cap G$. $\Longrightarrow$ $\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))$ ist präkompakt. Da $\mathbb{R}\times T$ als Produkt vollständiger Gruppen vollständig ist, ist die Vervollständigung $\tilde{G}$ von G gerade durch den Abschluß in $\mathbb{R}\times T$ gegeben. Wir betrachten jetzt in G die Folge $((x_m,\theta_m); m\in\mathbb{N})$, die durch $\sigma_m := \{m\}$, $k_n^{(m)} := 1$ $(n,m\in\mathbb{N})$ bestimmt ist. Es gilt also $(x_m,\theta_m) = (a_m,\bar{\alpha})$ $(m\in\mathbb{N})$. Daraus ersieht man $\lim_{m\to\infty}(x_m,\theta_m) = (0,\bar{\alpha})\in\overline{G} = \tilde{G}$. $\Longrightarrow$ $\tilde{G}$ enthält die nichttriviale kompakte Untergruppe $\{0\}\times T$.

§ 2 Der Spezialfall $I = \mathbb{N}$; summierbare Folgen.

Ist speziell $I = \mathbb{N}$, so ist $\mathfrak{f}_n := \{k \in \mathbb{N};\ k \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ konfinal in $\mathcal{F}(\mathbb{N})$. Die mit einer Folge $(x_n;\ n \in \mathbb{N})$ gebildete Reihe heißt konvergent, wenn die Folge $(\$[x](\mathfrak{f}_n);\ n \in \mathbb{N})$ konvergent ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn das konfinale Teilnetz $(\$[x](\mathfrak{f}_n);\ n \in \mathbb{N})$ von $(\$[x](\sigma);\ \sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}))$ konvergent ist. Im allgemeinen ist natürlich die Konvergenz von $(\$[x](\mathfrak{f}_n); n \in \mathbb{N})$ nicht hinreichend für die Summierbarkeit von $(x_n; n \in \mathbb{N})$. Es gilt jedoch:

<u>(2.1) Satz.</u> Sei $(E, \mathcal{T})$ eine kommutative topologische Gruppe und $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine Folge in E. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{f}_n := \{k \in \mathbb{N};\ k \leq n\}$ gesetzt. Dann gilt: Erfüllt $(x_n; n \in \mathbb{N})$ die CAUCHY-Bedingung und ist die Folge $(\$[x](\mathfrak{f}_n); n \in \mathbb{N})$ konvergent, so ist $(x_n; n \in \mathbb{N})$ summierbar.

<u>Beweis:</u> $(x_n; n \in \mathbb{N})$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung $\Longrightarrow (\$[x](\sigma);\ \sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}))$ ist ein CAUCHY-Netz. $(\$[x](\mathfrak{f}_n); n \in \mathbb{N})$ ist ein konvergentes konfinales Teilnetz $\Longrightarrow (\$[x](\sigma);\ \sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}))$ besitzt einen Berührpunkt $\Longrightarrow (\$[x](\sigma); \sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}))$ ist nach KELLEY[76, p. 191] konvergent. ./.

<u>(2.2) Lemma.</u> Ist $(E, \mathcal{T})$ eine kommutative topologische Gruppe und erfüllt die Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ die CAUCHY-Bedingung in $(E, \mathcal{T})$, so ist $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge.

<u>Beweis:</u> Setzt man $\sigma_n := \{n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, so folgt Lemma (2.2) unmittelbar aus (1.5f). ./.

Die drei folgenden Sätze zeigen, wie man das Erfülltsein der CAUCHY-Bedingung und die Summierbarkeit von $(x_n; n \in \mathbb{N})$ auf Aussagen über die mit $(x_n; n \in \mathbb{N})$ gebildete Reihe zurückführen kann.

<u>(2.3) Satz.</u> Sei $(E, \mathcal{T})$ eine kommutative topologische Gruppe und $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine Folge in E. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $(x_n; n \in \mathbb{N})$ erfüllt die CAUCHY-Bedingung.

(b) Für jede streng monotone Abbildung $h: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ist $(\$[x](h(\mathfrak{f}_n));\ n \in \mathbb{N})$ eine CAUCHY-Folge.

(c) Für jede Permutation $\pi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ist $(\$[x](\pi(\mathfrak{f}_n)); n \in \mathbb{N})$ eine CAUCHY-Folge.

Dabei ist wie oben $\mathfrak{f}_n := \{k \in \mathbb{N};\ k \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ gesetzt.

<u>Beweis:</u>

<u>(a) $\Longrightarrow$ (b):</u> Sei $h: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ streng monoton und $U \in \mathcal{U}_0(E)$ vorgegeben. Da $(x_n; n \in \mathbb{N})$ die CAUCHY-Bedingung erfüllt, gibt es ein $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit der Eigenschaft: $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}),\ \tau \cap \sigma = \emptyset \Longrightarrow \$[x](\tau) \in U$.

h ist streng monoton. $\Longrightarrow$ h ist injektiv. $\Longrightarrow \sigma_o := h^{-1}(\sigma) \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$. Sei $n_o := \max \sigma_o$; für $k > l > n_o$ gilt dann: $\$[x](h(\int_k)) - \$[x](h(\int_l)) = \$[x](h(\int_k \setminus \int_l)) \in U$. $\Longrightarrow (\$[x](h(\int_n)); n \in \mathbb{N})$ ist eine CAUCHY-Folge.

<u>(b) $\Longrightarrow$ (a):</u> Erfüllt $(x_n; n \in \mathbb{N})$ nicht die CAUCHY-Bedingung, so gibt es ein $U \in \mathfrak{U}_o(E)$ und eine Folge $(\tau_n; n \in \mathbb{N})$ in $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit $\max \tau_n < \min \tau_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\$[x](\tau_n) \notin U$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $J := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ und $h: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ die eindeutig bestimmte streng monotone Abbildung mit $h(\mathbb{N}) = J$. Dann ist $(\$[x](h(\int_n)); n \in \mathbb{N})$ keine CAUCHY-Folge.

<u>(a) $\Longrightarrow$ (c):</u> Dies beweist man wie "(a) $\Longrightarrow$ (b)" von oben.

<u>(c) $\Longrightarrow$ (a):</u> Erfüllt $(x_n; n \in \mathbb{N})$ nicht die CAUCHY-Bedingung, so gibt es ein $U \in \mathfrak{U}_o(E)$, so daß zu jedem $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ ein $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit $\sigma \cap \tau = \emptyset$ und $\$[x](\tau) \notin U$ existiert. Sei $\tau_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit $\$[x](\tau_1) \notin U$ gewählt. Wir setzen $\sigma_1 := \{n \in \mathbb{N};\ n \leq \max \tau_1\}$. Zu $\sigma_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ existiert $\tau_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $\tau_2 \cap \sigma_1 = \emptyset$, $\$[x](\tau_2) \notin U$. $\sigma_2 := \{n \in \mathbb{N};\ n \leq \max \tau_2\}$ etc. Offenbar ist $\sigma_n \subsetneq \sigma_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Indem wir innerhalb der Mengen $\sigma_1 \setminus \tau_1, \tau_1, \sigma_2 \setminus (\tau_2 \cup \sigma_1), \tau_2, \ldots$ die Element der Größe nach anordnen und anschließend entsprechend der Reihenfolge in $\sigma_1 \setminus \tau_1, \tau_1, \sigma_2 \setminus (\tau_2 \cup \sigma_1), \tau_2, \ldots$ abzählen, erhalten wir daher eine Permutation $\pi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, und $(\$[x](\pi(\int_n)); n \in \mathbb{N})$ ist nach Konstruktion keine CAUCHY-Folge. ./.

<u>(2.4) Satz.</u> Sei $(E, \mathcal{T})$ eine kommutative separierte topologische Gruppe und $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine Folge in E. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $(x_n; n \in \mathbb{N})$ ist summierbar.

(b) Für jede Permutation $\pi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ist die Folge $(\$[x](\pi(\int_n)); n \in \mathbb{N})$ konvergent.

<u>Beweis:</u> Siehe BOURBAKI[23, p. 69, Prop. 9]. ./.

<u>(2.5) Satz.</u> Sei $(E, \mathcal{T})$ eine kommutative separierte topologische Gruppe und $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine Folge in E. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $(x_n; n \in \mathbb{N})$ ist TF-summierbar.

(b) Für jede streng monotone Abbildung $h: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ist die Folge $(\$[x](h(\int_n)); n \in \mathbb{N})$ konvergent.

<u>Beweis:</u> (Vgl. BOURBAKI[23, p. 116, ex. 5].)

<u>(a) $\Longrightarrow$ (b):</u> Da $(x_n; n \in \mathbb{N})$ TF-summierbar ist, ist $(x_{h(n)}; n \in \mathbb{N})$ summierbar. Damit ist insbesondere $(\$[x](h(\int_n)); n \in \mathbb{N})$ konvergent.

<u>(b) $\Longrightarrow$ (a):</u> Es genügt offenbar zu zeigen, daß $(x_n; n \in \mathbb{N})$ selbst

summierbar ist, denn auf jede Teilfolge kann man die gleiche Argumentation anwenden. Mit Satz (2.3) folgt, daß $(x_n; n \in \mathbb{N})$ die CAUCHY-Bedingung erfüllt. Setzt man insbesondere $h := id_{\mathbb{N}}$, so folgt aus (b), daß das CAUCHY-Netz $(\$[x](\sigma);\ \sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}))$ einen Berührpunkt besitzt, also konvergent ist. ./.

<u>(2.6) Bemerkung.</u> Aus Satz (1.8) erhält man mit Lemma 1.2 aus KALTON [71, p. 401] : Ist die Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in der kommutativen separierten topologischen Gruppe $(E, \mathcal{T})$ TF-summierbar, so ist $\$[x](\mathrm{Pot}(\mathbb{N}))$ (als stetiges separiertes Bild des kompakten metrischen Raumes $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) in der Relativtopologie ein kompakter metrischer Raum.

§ 3 Summen - Vollständigkeit.

Ist die kommutative separierte topologische Gruppe $(E,\mathcal{T})$ vollständig, so ist jede Familie in E, die die CAUCHY-Bedingung erfüllt, bereits TF-summierbar. Für die Untersuchung der Summierbarkeit von Familien ist der folgende wesentlich schwächere Vollständigkeitsbegriff völlig ausreichend.

(3.1) Definition. Sei α eine Kardinalzahl. Eine kommutative separierte topologische Gruppe $(E,\mathcal{T})$ heißt α-Σ-vollständig (α - Summen - vollständig), wenn jede Familie $(x_\iota;\iota\in I)$ in E mit $\mathrm{card}(I)\leq\alpha$, die die CAUCHY-Bedingung erfüllt, schon summierbar ist. Für $\mathrm{card}(\mathbb{N})$-$\Sigma$-vollständig schreiben wir abkürzend Σ-vollständig.

(3.2) Bemerkungen.
(a) Die Kardinalitätsbeschränkung ist sinnvoll, wie folgendes Beispiel zeigt: $E:=\mathbb{R}^{[\mathbb{R}]}:=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ \mathrm{carr}(f)$ ist abzählbar$\}$, $\mathcal{T}:=$ Relativtopologie von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Dabei ist $\mathrm{carr}(f):=\{s\in\mathbb{R};\ f(s)\neq 0\}$ gesetzt. $(E,\mathcal{T})$ ist Σ-vollständig, aber nicht $\mathrm{card}(\mathbb{R})$-$\Sigma$-vollständig, denn die durch $e_s(t):=\delta_{st}$ $(s,t\in\mathbb{R})$ definierte Familie $(e_s;s\in\mathbb{R})$ ist in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ summierbar, erfüllt also die $\mathcal{T}$-CAUCHY-Bedingung. $(e_s;s\in\mathbb{R})$ ist jedoch in $(E,\mathcal{T})$ nicht summierbar.
(b) Die Definition von Σ-vollständig findet man für den Spezialfall der Topologie $\sigma(E,E')$ eines lokalkonvexen Raumes $(E,\mathcal{T})$ zuerst bei THOMAS[119, p. 1135]. Vergleiche hierzu auch THOMAS[122, p. 135].

Bevor wir zur Einordnung dieses Vollständigkeitsbegriffes zwei Implikationsketten angeben, geben wir die Definitionen für "p - vollständig" und für "MACKEY-Folgen-vollständig" an.
Ein separierter uniformer Raum heiße p-vollständig (präkompakt vollständig), wenn jede präkompakte Teilmenge bereits relativ kompakt ist. Bei DAY[33, p. 53] werden topologische lineare Räume mit obiger Eigenschaft "topologisch vollständig" genannt. Erfüllt ein separierter lokalkonvexer Raum obige Bedingung, so heißt er nach KÖTHE[80, p. 311] "polar halbreflexiv".

Eine Folge $(x_n;n\in\mathbb{N})$ in einem lokalkonvexen Raum $(E,\mathcal{T})$ heißt MACKEY-CAUCHY-Folge (MACKEY-Nullfolge), wenn es eine beschränkte absolutkonvexe Teilmenge $B\subset E$ mit $x_n\in B$ $(n\in\mathbb{N})$ so gibt, daß $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine CAUCHY-Folge (Nullfolge) in $([B],p_B)$ ist, wobei $[B]$ der lineare Spann von B und p_B das Eichfunktional zu B ist.

Ein separierter lokalkonvexer Raum $(E,\mathcal{T})$ heißt MACKEY-Folgen-vollständig (oder auch lokal vollständig), wenn jede MACKEY-CAUCHY-

Folge in $(E,\mathcal{T})$ konvergent ist. Für eine ausführliche Diskussion der zuletzt genannten Begriffe vergleiche man Lemma (3.9).

<u>(3.3) Satz.</u> Sei $(E,\mathcal{T})$ ein separierter topologischer linearer Raum. $\mathfrak{f}$ sei die Kardinalität einer Nullumgebungsbasis in $(E,\mathcal{T})$, α eine Kardinalzahl mit $\operatorname{card}(\mathbb{N}) \leq \alpha \leq \mathfrak{f}$. (Wegen (1.4) ist es nicht nötig, größere Kardinalzahlen als $\mathfrak{f}$ zu betrachten.) Dann gelten unter den Vollständigkeitsbegriffen für $(E,\mathcal{T})$ folgende Implikationen

(a)

$$\begin{array}{c}
\text{vollständig} \\
\Downarrow \not\Uparrow \\
\text{quasi-vollständig} \\
\Downarrow \not\Uparrow \\
\text{p-vollständig} \\
\Downarrow \not\Uparrow \\
\mathfrak{f}\text{-}\Sigma\text{-vollständig} \\
\Downarrow \not\Uparrow \ (\mathfrak{f} \neq \alpha) \\
\alpha\text{-}\Sigma\text{-vollständig} \\
\Downarrow \not\Uparrow \ (\alpha \neq \operatorname{card}(\mathbb{N})) \\
\Sigma\text{-vollständig}
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{c}
\text{p-vollständig} \\
\Downarrow \not\Uparrow \\
\text{Folgen-vollständig} \\
\Downarrow \not\Uparrow \\
\Sigma\text{-vollständig.}
\end{array}$$

Ist $(E,\mathcal{T})$ lokalkonvex, so gilt zusätzlich:

(c)

$$\begin{array}{c}
\Sigma\text{-vollständig} \\
\Downarrow \not\Uparrow \\
\text{MACKEY-Folgen-vollständig.}
\end{array}$$

<u>Beweis:</u>

<u>vollständig $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ quasi-vollständig.</u>

"$\Longrightarrow$" klar.

"$\not\Leftarrow$" $(l^1, \sigma(l^1, c_0))$ ist als schwaches Dual eines tonnelierten Raumes quasi-vollständig, jedoch nicht vollständig wegen BOURBAKI [26, p. 102].

<u>quasi-vollständig $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ p-vollständig.</u>

"$\Longrightarrow$" klar.

"$\not\Leftarrow$" Ein Beispiel für einen p-vollständigen Raum, der nicht quasi-vollständig ist, wurde zuerst von HAYDON[61] angegeben. Ein weiteres

Beispiel findet man bei WHEELER[135, p. 471].

<u>p-vollständig $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ $\mathfrak{f}$-Σ-vollständig.</u>

"$\Longrightarrow$" klar nach (1.6).

"$\not\Longleftarrow$" Für $(l^1, \sigma(l^1,l^\infty))$ erhält man als Mächtigkeit einer Nullumgebungsbasis $\mathfrak{f} = \mathrm{card}(l^\infty) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ (BOURBAKI[26, p. 28, ex. 5]). Mit (1.10) erhält man, daß jede Familie $(x_\iota; \iota \in I)$ in l^1, die die $\sigma(l^1,l^\infty)$-CAUCHY-Bedingung erfüllt, höchstens für abzählbar viele $\iota \in I$ von 0 verschiedene Terme enthalten kann. Es gilt also hier (card($\mathbb{R}$)-Σ-vollständig)$\Longleftrightarrow$(Σ-vollständig). $(l^1, \sigma(l^1,l^\infty))$ ist Folgen-vollständig (DAY[33, p. 37]). Wie später gezeigt wird, impliziert die Folgen-Vollständigkeit die Σ-Vollständigkeit; $(l^1, \sigma(l^1,l^\infty))$ ist also card($\mathbb{R}$)-Σ-vollständig. Die Einheitskugel B von $(l^1, \|\cdot\|_1)$ ist $\sigma(l^1,l^\infty)$-präkompakt, aber nicht $\sigma(l^1,l^\infty)$-vollständig. Sonst wäre nämlich B $\sigma(l^1,l^\infty)$-kompakt und damit $(l^1, \|\cdot\|_1)$ reflexiv (DAY[33, p. 69]).

<u>$\mathfrak{f}$-Σ-vollständig $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ α-Σ-vollständig ($\mathfrak{f} \neq \alpha$).</u>

"$\Longrightarrow$" klar.

"$\not\Longleftarrow$" Sei I eine Menge mit $\mathrm{card}(I) = \mathfrak{f}$ und $E := \{f: I \longrightarrow \mathbb{R};\ \mathrm{card}(\mathrm{carr}(f)) \leq \alpha\} \subset \mathbb{R}^I$. E trage die Relativtopologie vom Produkt $\mathbb{R}^I$. $(E, \mathcal{F})$ ist α-Σ-vollständig, aber nicht $\mathfrak{f}$-Σ-vollständig (vgl. (3.2a)).

<u>p-vollständig $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ Folgen-vollständig.</u>

"$\Longrightarrow$" klar, da jede CAUCHY-Folge präkompakt ist.

"$\not\Longleftarrow$" $(l^1, \sigma(l^1,l^\infty))$ ist Folgen-vollständig, aber nicht p-vollständig.

<u>Folgen-vollständig $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ Σ-vollständig.</u>

"$\Longrightarrow$" Dies folgt mit Satz (2.3) und Satz (2.4).

"$\not\Longleftarrow$" Bei JAMES[68, p. 523] wird ein nicht reflexiver BANACH-Raum $(E, \|\cdot\|)$ konstruiert, dessen sämtliche Duale E', E",... separabel sind. Sei $B := \{x \in E';\ \|x\| \leq 1\}$. $(B, \sigma(E',E'') \cap B)$ kann nicht Folgenvollständig sein, da $(B, \sigma(E',E'') \cap B)$ präkompakt und wegen der Separabilität von E" auch metrisierbar ist (DUNFORD, SCHWARTZ[50, p. 426]). Wäre $(B, \sigma(E',E'') \cap B)$ auch noch Folgen-vollständig, so würde die Reflexivität von $(E', \|\cdot\|)$ und damit die Reflexivität von $(E, \|\cdot\|)$ folgen (DAY[33, p. 69]).

* Aus Satz (5.10b) folgt, daß die quasi-vollständige Topologie $\sigma(E',E)$ und die Normtopologie $\beta(E',E)$ die gleichen TF-summierbaren Familien besitzen, denn wegen der Separabilität von $\beta(E',E)$ ist $\eta(E',E) = \beta(E',E) = \beta(E',E'')$. Mit der Inklusionskette

$\sigma(E',E) \subset \sigma(E',E'') \subset \beta(E',E'') = \beta(E',E)$ erhält man, daß $(E', \sigma(E',E''))$ Σ-vollständig ist: Jede Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$, die die $\sigma(E',E'')$-CAUCHY-Bedingung erfüllt, erfüllt auch die $\sigma(E',E)$-CAUCHY-Bedingung. Wegen der Quasi-Vollständigkeit von $\sigma(E',E)$ ist $(x_n; n \in \mathbb{N})$ $\sigma(E',E)$-TF-summierbar, also auch $\beta(E',E'')$-TF-summierbar und damit insbesondere $\sigma(E',E'')$-summierbar. $*$

Dieses Beispiel ist die Ausarbeitung eines bei THOMAS[122, p.140] in einer Fußnote wiedergegebenen Hinweises von D. DEAN.

<u>Σ-vollständig $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ MACKEY-Folgen-vollständig.</u>

"$\Longrightarrow$" Dies wird in Satz (3.7) bewiesen.

"$\not\Longleftarrow$" $(c_o, \sigma(c_o, l^1))$ ist MACKEY-Folgen-vollständig, da eine zwischen $\sigma(c_o, l^1)$ und $\beta^*(c_o, l^1)$ liegende vollständige lokalkonvexe Topologie, nämlich $\tau(c_o, l^1) = \beta(c_o, l^1)$, existiert. $(c_o, \sigma(c_o, l^1))$ ist jedoch nicht Σ-vollständig, wie man mit der Folge $(e_n; n \in \mathbb{N})$ der "Einheitsvektoren" sieht. ./.

Satz (3.3) zeigt, daß der Begriff der Summen-Vollständigkeit sehr schwach ist.

<u>(3.4) Satz.</u> Sei E eine kommutative Gruppe; $\mathcal{T} \subset \mathcal{Z}$ seien zwei Gruppentopologien auf E und $\mathcal{Z}$ besitze eine Nullumgebungsbasis aus $\mathcal{T}$-abgeschlossenen Mengen. Dann gilt:

(a) Ein Filter $\mathcal{F}$ (bzw. ein Netz N) auf E ist genau dann $\mathcal{Z}$-konvergent, wenn $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{Z}$-CAUCHY-Filter (bzw. N ein $\mathcal{Z}$-CAUCHY-Netz) ist und $\mathcal{F}$ (bzw. N) $\mathcal{T}$-konvergent ist.

(b) Ist $(E, \mathcal{T})$ separiert und Σ-vollständig, so ist auch $(E, \mathcal{Z})$ Σ-vollständig.

<u>Beweis:</u> Für (a) vergleiche man BOURBAKI[25, p. 202]. (b) folgt unmittelbar aus (a). ./.

<u>(3.5) Korollar.</u> Ist der lokalkonvexe separierte Raum $(E, \mathcal{T})$ $\sigma(E,E')$-Σ-vollständig, so ist auch $(E, \mathcal{T})$ Σ-vollständig.

Ist $(E, \mathcal{R})$ eine kommutative metrisierbare topologische Gruppe, so gibt es eine translationsinvariante Metrik d auf E, die die Topologie $\mathcal{R}$ liefert (SEGAL, KUNZE[117, p. 186]). Wir setzen $q(x) := d(x,0)$ $(x \in E)$ und nennen q eine Quasinorm auf E.

<u>(3.6) Satz.</u> Ist die Topologie $\mathcal{R}$ der kommutativen separierten topologischen Gruppe $(E, \mathcal{R})$ metrisierbar, so gilt: $(E, \mathcal{R})$ ist genau dann vollständig, wenn $(E, \mathcal{R})$ Σ-vollständig ist.

<u>Beweis:</u> Ist $(E, \mathcal{R})$ vollständig, so ist $(E, \mathcal{R})$ auch Σ-vollstän-

dig. Sei $q: E \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Quasinorm, die die Topologie $\mathcal{R}$ liefert und $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-CAUCHY-Folge in E. Dann gibt es eine Teilfolge $n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $q(x_{n(k+1)} - x_{n(k)}) < 2^{-k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Die durch $y_k := x_{n(k+1)} - x_{n(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ definierte Folge erfüllt daher die $\mathcal{R}$-CAUCHY-Bedingung. Da $(E, \mathcal{R})$ Σ-vollständig ist, ist $(y_k; k \in \mathbb{N})$ summierbar. Insbesondere ist deshalb die Folge der Abschnittssummen $\sum_{k=1}^{j} y_k = \sum_{k=1}^{j} (x_{n(k+1)} - x_{n(k)}) = x_{n(j+1)} - x_{n(1)}$ $(j \in \mathbb{N})$ $\mathcal{R}$-konvergent. Also ist auch $(x_{n(k)}; k \in \mathbb{N})$ konvergent in $(E, \mathcal{R})$. Damit ist aber auch $(x_n; n \in \mathbb{N})$ als CAUCHY-Folge mit Berührpunkt konvergent. ./.

Für Verallgemeinerungen des folgenden Satzes vergleiche man (3.11d).

<u>(3.7) Satz.</u> Jeder separierte Σ-vollständige lokalkonvexe Raum $(E, \mathcal{R})$ ist lokal vollständig, d.h. MACKEY-Folgen-vollständig.

<u>Beweis:</u> Sei $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine MACKEY-CAUCHY-Folge in $(E, \mathcal{R})$. Dann gibt es eine abgeschlossene beschränkte absolutkonvexe Menge B in E, so daß $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine CAUCHY-Folge in $([B], p_B)$ ist. Wie beim Beweis zu Satz (3.6) erhält man eine Teilfolge $n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $p_B(x_{n(k+1)} - x_{n(k)}) < 2^{-k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Die durch $y_k := x_{n(k+1)} - x_{n(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ definierte Folge erfüllt daher die CAUCHY-Bedingung in $([B], p_B)$, also insbesondere in $(E, \mathcal{R})$. Da $(E, \mathcal{R})$ Σ-vollständig ist, ist $(y_k; k \in \mathbb{N})$ in $(E, \mathcal{R})$ summierbar. Wie beim Beweis zu Satz (3.6) folgt daraus die Konvergenz von $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in $(E, \mathcal{R})$.

Wir wollen noch zeigen, daß $(x_n; n \in \mathbb{N})$ bereits in $([B], p_B)$ konvergent ist. Da $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine p_B-CAUCHY-Folge ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $p_B(x_n - x_k) \leq \varepsilon$ für alle $n, k \geq N$, d.h. $x_n - x_k \in \varepsilon B$ für alle $n, k \geq N$. $(x_n; n \in \mathbb{N})$ ist $\mathcal{R}$-konvergent gegen ein $x \in E$ und B ist $\mathcal{R}$-abgeschlossen. Durch Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$ erhält man also $x - x_k \in \overline{\varepsilon B} = \varepsilon B$ für alle $k \geq N$, d.h. $p_B(x - x_k) \leq \varepsilon$ für alle $k \geq N$. $\Longrightarrow$ $(x_k; k \in \mathbb{N})$ konvergiert in $([B], p_B)$ gegen x. ./.

Mit KÖTHE[80, p. 384 (2)] zeigt man, daß jeder MACKEY-Folgen-vollständige bornologische lokalkonvexe Raum bereits ultrabornologisch im Sinne von BOURBAKI[27, p. 34, ex. 11] ist (vgl. dazu auch das nachfolgend bewiesene Lemma (3.9)). Mit (3.7) erhält man daher insbesondere:

<u>(3.8) Korollar.</u> Jeder separierte Σ-vollständige bornologische lokalkonvexe Raum ist bereits ultrabornologisch.

Für eine weitere Aussage benötigen wir das folgende Lemma, das

auch für sich interessant ist.

(3.9) Lemma. Für jeden separierten topologischen linearen Raum $(E,\mathcal{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Für jeden metrisierbaren topologischen linearen Raum $(H,\mathcal{T})$ besitzt jede stetige lineare Abbildung $T: (H,\mathcal{T}) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ eine stetige lineare Fortsetzung $\tilde{T}: (\tilde{H},\tilde{\mathcal{T}}) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ auf die vollständige Hülle $(\tilde{H},\tilde{\mathcal{T}})$ von $(H,\mathcal{T})$.

(b) Für jeden normierten Raum $(H,\|\cdot\|)$ besitzt jede stetige lineare Abbildung $T: (H,\|\cdot\|) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ eine stetige lineare Fortsetzung $\tilde{T}: (\tilde{H},\|\tilde{\cdot}\|) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ auf die vollständige Hülle $(\tilde{H},\|\tilde{\cdot}\|)$ von $(H,\|\cdot\|)$.

(c) Für jede beschränkte absolutkonvexe abgeschlossene Teilmenge B von $(E,\mathcal{R})$ ist $([B],p_B)$ vollständig.

(d) Zu jeder beschränkten absolutkonvexen Teilmenge A von $(E,\mathcal{R})$ existiert eine beschränkte absolutkonvexe Teilmenge B von $(E,\mathcal{R})$ mit $A \subset B$, so daß $([B],p_B)$ ein BANACH-Raum ist.

(e) Für jeden normierten Raum $(F,\|\cdot\|)$, jede stetige lineare Abbildung $T: (F,\|\cdot\|) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ und jede Nullfolge $(y_n;n\in\mathbb{N})$ in F ist $\overline{\Gamma(\{T(y_n);n\in\mathbb{N}\})}^{\mathcal{R}}$ kompakt.

Ist $(E,\mathcal{R})$ zusätzlich lokalkonvex, so kann die Liste der Äquivalenzen fortgesetzt werden durch:

(f) $(E,\mathcal{R})$ ist MACKEY-Folgen-vollständig.

(g) Die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle jeder MACKEY-Nullfolge ist kompakt.

(h) Die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle jeder $\sigma(E,E')$-Nullfolge ist $\sigma(E,E')$-kompakt.

(i) Die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle jeder $\mathcal{R}$-Nullfolge ist $\mathcal{R}$-kompakt.

Beweis:

(a) $\Longrightarrow$ (b): klar.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Da B beschränkt ist, ist die kanonische Inklusion $i_B: ([B],p_B) \hookrightarrow (E,\mathcal{R})$ stetig und besitzt deshalb nach (b) eine stetige lineare Fortsetzung $\tilde{i}_B: ([\tilde{B}],\tilde{p}_B) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$. Jede p_B-CAUCHY-Folge ist daher in $(E,\mathcal{R})$ konvergent. Mit der $\mathcal{R}$-Abgeschlossenheit von B zeigt man nun wie beim Beweis zu Satz (3.7), daß diese Folge auch in $([B],p_B)$ konvergiert.

(c) $\Longrightarrow$ (d): Setze $B := \overline{A}^{\mathcal{R}}$.

(d) $\Longrightarrow$ (e): Sei K die Einheitskugel in $(F,\|\cdot\|)$. Nach (d) gibt es zu $A := T(K)$ eine beschränkte absolutkonvexe Teilmenge B in

$(E,\mathcal{R})$ mit $B \supset A$, so daß $([B],p_B)$ vollständig ist.
$\hat{T}: (F,\|\cdot\|) \longrightarrow ([B],p_B)$, $\hat{T}(y) := T(y)$ $(y \in F)$ ist stetig, also ist $(T(y_n);n\in\mathbb{N})$ eine Nullfolge in $([B],p_B)$ und $C := \overline{\Gamma(\{T(y_n);n\in\mathbb{N}\})}^{p_B}$ ist kompakt in $([B],p_B)$. Mit der Stetigkeit der Inklusion $i_B: ([B],p_B) \hookrightarrow (E,\mathcal{R})$ folgt die Kompaktheit von $\overline{\Gamma(\{T(y_n);n\in\mathbb{N}\})}^{\mathcal{R}} = C$.

<u>(e) $\Longrightarrow$ (a):</u> Wir beweisen zunächst eine Hilfsaussage: Ist $(G,\mathcal{F})$ ein metrisierbarer topologischer linearer Raum, q eine Pseudonorm auf G, die die Topologie $\mathcal{F}$ liefert und $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine Folge in G mit $(q(x_n);n\in\mathbb{N}) \in l^1$, so ist $\Gamma(\{x_n;n\in\mathbb{N}\})$ präkompakt, also insbesondere beschränkt.

<u>Bew.:</u> O.E. kann man $(G,\mathcal{F})$ als vollständig voraussetzen. Wegen $q(\sum_{k\in\sigma}\lambda_k x_k) \leq \sum_{k\in\sigma} q(\lambda_k x_k)$ $(\lambda_k \in \mathbb{K},\ k\in\sigma,\ \sigma\in\mathcal{F}(\mathbb{N}))$, $q(\lambda x) \leq q(x)$ $(\lambda\in\mathbb{K}, |\lambda|\leq 1,\ x\in G)$ und $(q(x_k);k\in\mathbb{N}) \in l^1$ konvergiert die Folge der stetigen linearen Abbildungen $T_n: (l^\infty,\sigma(l^\infty,l^1)) \longrightarrow (G,\mathcal{F})$, $(\lambda_k;k\in\mathbb{N}) \longmapsto \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$, $(n\in\mathbb{N})$ auf der l^∞- Einheitskugel gleichmäßig gegen die Abbildung $T: l^\infty \longrightarrow G$, $(\lambda_k;k\in\mathbb{N}) \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k$. Dann ist das stetige Bild der $\sigma(l^\infty,l^1)$-kompakten Einheitskugel von l^∞ eine absolutkonvexe $\mathcal{F}$-kompakte Teilmenge von G, die die gegebene Folge enthält. ./.

Nun sei $(H,\mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer linearer Raum, q eine Pseudonorm auf H, die die Topologie $\mathcal{T}$ liefert und $T: (H,\mathcal{T}) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ sei stetig und linear. Es genügt offenbar zu zeigen, daß für jede $\mathcal{T}$-CAUCHY-Folge $(x_n;n\in\mathbb{N})$ in H die Bild-Folge $(T(x_n);n\in\mathbb{N})$ in $(E,\mathcal{R})$ konvergiert. Da $(T(x_n);n\in\mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-CAUCHY-Folge ist, genügt es die Konvergenz einer Teilfolge zu zeigen. Sei also $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine $\mathcal{T}$-CAUCHY-Folge, o.E. $x_1 = 0$. Wir setzen $U_m := q^{-1}([0,2^{-m}))$ $(m\in\mathbb{N})$. Da $(U_m;m\in\mathbb{N})$ eine $\mathcal{T}$-Nullumgebungsbasis ist, gibt es eine streng monotone Abbildung $n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $x_k - x_l \in 2^{-r}\cdot r^{-1}\cdot U_r$ für $k,l \geq n(r)$ $(r\in\mathbb{N})$. Sei $y_1 := 0$, $y_k := x_{n(k)}$ $(k \geq 2)$ und $v_k := y_{k+1} - y_k$ $(k\in\mathbb{N})$ gesetzt. Dann ist $(y_k;k\in\mathbb{N})$ eine Teilfolge von $(x_n;n\in\mathbb{N})$ und es gilt $v_k = y_{k+1} - y_k = x_{n(k+1)} - x_{n(k)} \in 2^{-k}\cdot k^{-1}\cdot U_k$, also $q(2^k\cdot k\cdot v_k) < 2^{-k}$ $(k\geq 2)$. Nach obiger Hilfsaussage ist $B := \Gamma(\{2^k\cdot k\cdot v_k;k\in\mathbb{N}\})$ beschränkt in $(H,\mathcal{T})$. Wegen $2^k\cdot k\cdot v_k \in B$ $(k\in\mathbb{N})$ ist $(2^k\cdot v_k;k\in\mathbb{N})$ eine Nullfolge in $([B],p_B)$. Mit der Stetigkeit der Inklusion $j_B: ([B],p_B) \hookrightarrow (H,\mathcal{T})$ erhält man, daß $T(2^k\cdot v_k) = (T\circ j_B)(2^k\cdot v_k)$ $(k\in\mathbb{N})$ stetiges lineares Bild der Nullfolge $(2^k\cdot v_k;k\in\mathbb{N})$ in dem <u>normierten Raum</u> $([B],p_B)$ ist. Nach (e) ist deshalb $A := \overline{\Gamma(\{T(2^k\cdot v_k);k\in\mathbb{N}\})}^{\mathcal{R}}$ kompakt. Aus $T(y_{n+1}) = T(\sum_{m=1}^{n} v_m) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|x_n\| \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und der Vollständigkeit von X folgt nun die Konvergenz der Folge $(T(x_n) \mid n \in \mathbb{N})$ in $(Y, \mathbb{K})$.

Nun sei $(Y, \mathbb{K})$ auch lokalkonvex.

<u>(c) $\Longrightarrow$ (f)</u> folgt unmittelbar aus der Definition.

<u>(f) $\Longrightarrow$ (e)</u> Sei S abzählbarer und kompakter Raum, $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine ZAUCH-Folge in $([S], \sigma_S)$. Nach (f) ist $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ in $(X, \mathbb{K})$ konvergent, mit der $\mathbb{K}$-Quasivollständigkeit von X folgt aus dem Beweis zu Satz (1.7), daß $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ bereits in $([S], \sigma_S)$ konvergiert.

<u>(e) $\Longrightarrow$ (g)</u> Ist $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge in $(X, \mathbb{K})$, so gibt es eine beschränkte abzählbarkeitsarme Teilmenge S in $(X, \mathbb{K})$ mit $x_n \in S$ $(n \in \mathbb{N})$, so daß $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge in $([S], \sigma_S)$ ist. Mit der Stetigkeit der Inclusion $i_S : ([S], \sigma_S) \longrightarrow (X, \mathbb{K})$ folgt aus (e) die Kompaktheit von $\overline{\Gamma(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})}^{\sigma^*}$.

<u>(g) $\Longrightarrow$ (a)</u> Sei $T : (X, \mathbb{K}) \longrightarrow (Y, \mathbb{K})$ linear und stetig, $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge in $(X, \mathbb{K})$ und U die Einheitskugel in $(X, \mathbb{K})$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in k \cdot U$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gibt eine beschränkte abzählbarkeitsarme Teilmenge von X und mit der Quasigleichheit der Abbildung $\hat{T} : ([X], \sigma_X) \longrightarrow ([Y], \sigma_Y)$, $\hat{T}(x) = T(x)$ $(x \in X)$ einen nach (d) daß $(T(x_n) \mid n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge bei $(Y, \mathbb{K})$ ist. Mit (g) folgt nun die Behauptung.

<u>(h) $\Longrightarrow$ (i)</u> Sei $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine $\mathbb{K}(T, X)$-Nullfolge und e_n der n-te Einheitsvektor in $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Wir definieren die Abbildung $T : (\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \mathbb{K})$ durch $T(e_n) = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und linear Fortsetzung. Für $(\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ gilt nach $T(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. T ist also stetig und besitzt deshalb nach (h) eine stetige lineare Fortsetzung auf $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$. Es wird wieder T bezeichnet. Sei $T^{\sigma} : X' \longrightarrow \ell^{\infty}$ die transponierte Abbildung. Dann gilt $\langle T^{\sigma}(x'), e_n \rangle = \langle x', T(e_n) \rangle = \langle x', x_n \rangle$ $(n \in \mathbb{N})$, d.h. $T^{\sigma}(X') \subset c_0$ nach Voraussetzung. Daher ist $T : (\ell^1, \sigma(\ell^1, c_0)) \longrightarrow (X, \sigma(X, X'))$ stetig und $T(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ ist in dem $\sigma(X, X')$-kompakten Bild der ℓ^1-Einheitskugel enthalten.

<u>(i) $\Longrightarrow$ (j)</u> Ist $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine $\mathbb{K}$-Nullfolge, so ist $\overline{\Gamma(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})}$ $\mathbb{K}$-vollkompakt und in der nach (i) $\sigma(X, X')$-kompakten, also $\mathbb{K}$-vollständigen Menge $\overline{\Gamma(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})}^{\sigma}$ enthalten.

<u>(j) $\Longrightarrow$ (k)</u> Jede $\mathbb{K}(T)$-Nullfolge ist kompakt, also $\mathbb{K}$-[illegible] ge[illegible]

Teile von Lemma (1.9) gehen [illegible] zurück. [illegible] verdanke ich einer Anregung von Herrn [illegible].

Mit "(a)$\Longleftrightarrow$(f)" aus Lemma (3.9) sieht man, daß ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum genau dann vollständig ist, wenn er MACKEY-Folgen-vollständig ist. (Dies ist bekannt.)

Mit "(i)$\Longleftrightarrow$(f)" aus Lemma (3.9) erhält man, daß ein normierter Raum genau dann vollständig ist, wenn die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle jeder Nullfolge kompakt ist.

Daß (a) und (i) für nicht notwendig lokalkonvexe Räume nicht äquivalent sind, sieht man am Beispiel $l^{1/2} := \{(x_n; n\in\mathbb{N})\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}};\ \sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^{1/2} < \infty\}$ mit der durch $q(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^{1/2}$ $(x = (x_n; n\in\mathbb{N})\in l^{1/2})$ induzierten Topologie. $(l^{1/2}, q)$ ist ein vollständig metrisierbarer topologischer linearer Raum, also ist (a) erfüllt. Sei e^n der n-te Einheitsvektor in $l^{1/2}$. Dann ist $u^n := e^n/\sqrt{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ eine Nullfolge in $(l^{1/2}, q)$ und für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist $v^n := n^{-1}\sum_{i=1}^{n} u^i$ in $\Gamma(\{u^n; n\in\mathbb{N}\})$ enthalten. Es gilt jedoch $q(v^n) = \sum_{i=1}^{n} n^{-1/2}\cdot(i)^{1/4} \geq n\cdot n^{1/2}\cdot n^{1/4} = n^{1/4}$ $(n\in\mathbb{N})$. Also ist $\Gamma(\{u^n; n\in\mathbb{N}\})$ nicht beschränkt.

Mit Lemma (3.9) können wir nun folgende Verallgemeinerung eines Satzes von THOMAS[119, p. 1135] beweisen:

<u>(3.10) Satz.</u> Der separierte lokalkonvexe Raum $(E,\mathcal{T})$ sei MACKEY-Folgen-vollständig und besitze folgende Eigenschaft:

(*) Für jeden kompakten topologischen Raum K ist jede stetige lineare Abbildung $T: (C(K), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \sigma(E,E'))$ kompakt (d.h. das Bild der Einheitskugel von $C(K)$ ist relativ kompakt in $(E, \sigma(E,E'))$).

Dann ist $(E, \sigma(E,E'))$ Σ-vollständig.

<u>Beweis:</u> Sei $(x_n; n\in\mathbb{N})$ eine Folge in E, die die $\sigma(E,E')$-CAUCHY-Bedingung erfüllt. Dann ist $\mathfrak{L}[x]: (\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \sigma(E,E'))$ nach (1.10) stetig. Da mit $(E,\mathcal{T})$ auch $(E, \sigma(E,E'))$ MACKEY-Folgen-vollständig ist, besitzt $\mathfrak{L}[x]$ nach Lemma (3.9) genau eine stetige lineare Fortsetzung $\mathfrak{L}[x]: (c_0, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \sigma(E,E'))$. Sei K die ALEXANDROFF-Kompaktifizierung von $(\mathbb{N}, \mathrm{Pot}(\mathbb{N}))$. Dann gilt $C(K) \cong c_0 \dotplus \mathbb{K}$ und diese Summe ist auch $\|\cdot\|_\infty$-topologisch. Man kann daher $\mathfrak{L}[x]$ zu einer stetigen linearen Abbildung $T: (C(K), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \sigma(E,E'))$ fortsetzen. Nach Voraussetzung ist T kompakt. Also ist $\mathfrak{L}[x]\{\mathcal{F}(\mathbb{N})\}$ relativ kompakt in $(E, \sigma(E,E'))$. Mit (1.11) folgt daraus die TR-Summierbarkeit von $(x_n; n\in\mathbb{N})$. Insbesondere ist also $(E, \sigma(E,E'))$ Σ-vollständig. ./.

<u>(3.11) Bemerkungen.</u>

(a) Statt für Folgen kann man Satz (3.10) offenbar genauso für Familien beweisen.

(b) Da $(C(K),\|\cdot\|_\infty)$ ein BANACH-Raum ist, ist $L(C(K),E_\sigma):=$ $\{T: (C(K),\|\cdot\|_\infty)\longrightarrow(E,\sigma(E,E'));\ T$ linear und stetig$\} = L(C(K),E_\beta)$, denn: Ist $S: (C(K),\|\cdot\|_\infty)\longrightarrow(E,\beta(E,E'))$ stetig und linear, so ist natürlich auch $S: (C(K),\|\cdot\|_\infty)\longrightarrow(E,\sigma(E,E'))$ stetig und da $(C(K),\|\cdot\|_\infty)$ seine β-Topologie trägt, folgt aus der Stetigkeit von $S: (C(K),\|\cdot\|_\infty)\longrightarrow(E,\sigma(E,E'))$ die Stetigkeit der Abbildung $S: (C(K),\|\cdot\|_\infty)\longrightarrow(E,\beta(E,E'))$. Man kann also statt der Stetigkeit von $S: (C(K),\|\cdot\|_\infty)\longrightarrow(E,\sigma(E,E'))$ die Stetigkeit dieser Abbildung für irgendeine zwischen $\sigma(E,E')$ und $\beta(E,E')$ liegende lineare Topologie verlangen.

(c) Bei THOMAS[119, p. 1135] wird Satz (3.10) für quasi-vollständige lokalkonvexe Räume bewiesen. In obiger Version liefert Satz (3.10) dagegen auch für Räume, die ihre schwache Topologie tragen, noch eine Aussage.

(d) Lemma (3.9) legt es nahe, den Begriff "MACKEY-Folgen-vollständig" wie folgt zu verallgemeinern: Sei $\mathcal{K}$ eine der Kategorien

KTG = kommutative topologische Gruppen
TLR = topologische lineare Räume
LKX = lokalkonvexe Räume.

Ist $(E,\mathcal{R})$ ein Objekt aus $\mathcal{K}$ und ist $\mathcal{R}$ separiert, so heiße $(E,\mathcal{R})$ MACKEY-Folgen-vollständig, wenn jeder $\mathcal{K}$-Morphismus $T: (H,\mathcal{T})\longrightarrow(E,\mathcal{R})$ für jedes metrisierbare Objekt $(H,\mathcal{T})$ aus $\mathcal{K}$ eine stetige Fortsetzung $\tilde{T}: (\tilde{H},\tilde{\mathcal{T}})\longrightarrow(E,\mathcal{R})$ auf die vollständige Hülle $(\tilde{H},\tilde{\mathcal{T}})$ von $(H,\mathcal{T})$ besitzt.

Eine Folge $(x_n;n\in\mathbb{N})$ in $(E,\mathcal{R})$ heiße MACKEY-CAUCHY-Folge, wenn es ein metrisierbares Objekt $(H,\mathcal{T})$ in $\mathcal{K}$, einen $\mathcal{K}$-Morphismus $T: (H,\mathcal{T})\longrightarrow(E,\mathcal{R})$ und eine $\mathcal{T}$-CAUCHY-Folge $(y_n;n\in\mathbb{N})$ in H mit $T(y_n) = x_n$ $(n\in\mathbb{N})$ gibt. $(E,\mathcal{R})$ ist offenbar genau dann MACKEY-Folgen-vollständig, wenn jede MACKEY-CAUCHY-Folge konvergent ist und metrisierbare Objekte sind genau dann vollständig, wenn sie MACKEY-Folgen-vollständig sind.

Mit Lemma (3.9) sieht man, daß obige Definition für lokalkonvexe Räume gerade den üblichen Begriff liefert. Für nicht notwendig lokalkonvexe Räume verwenden manche Autoren jedoch auch eine andere Definition (vgl. HOGBE-NLEND[63, p. 7 ff.]).

Daß "Σ-vollständig" in jeder der drei Kategorien "MACKEY-Folgen-vollständig" gemäß obiger Definition impliziert, sieht man nun leicht so:

Sei $(E,\mathcal{R})$ ein Σ-vollständiges Objekt aus $\mathcal{K}$, $(H,\mathcal{T})$ ein metrisierbares Objekt aus $\mathcal{K}$ und $T: (H,\mathcal{T})\longrightarrow(E,\mathcal{R})$ ein $\mathcal{K}$-Morphismus. Dann besitzt T eine stetige Fortsetzung auf die Σ-

Vervollständigung $(\hat{H},\hat{\mathcal{T}})$ von $(H,\mathcal{T})$, die als Durchschnitt aller Σ-vollständigen Teilräume der Vervollständigung $(\tilde{H},\tilde{\mathcal{T}})$, die H enthalten, erklärt ist. Diese Σ-Vervollständigung stimmt aber nach Satz (3.6) wegen der Metrisierbarkeit von $(H,\mathcal{T})$ mit der Vervollständigung $(\tilde{H},\tilde{\mathcal{T}})$ von $(H,\mathcal{T})$ überein.

Bei der Anwendung des Satzes von ORLICZ-PETTIS in der Darstellungstheorie von Operatoren spielen die $\sigma(E,E')$-Σ-vollständigen Räume eine wichtige Rolle. Bei THOMAS[119, p. 1135] wird gezeigt, daß für quasi-vollständige lokalkonvexe Räume $(E,\mathcal{R})$ die $\sigma(E,E')$-Σ-Vollständigkeit zu der Eigenschaft $(*)$ aus Satz (3.10) äquivalent ist. Ähnliche Resultate wurden von BATT[15, p. 173] für gewisse nichtlineare Abbildungen $T: C(K) \longrightarrow E$ (E ein BANACH-Raum) bewiesen. Man vergleiche hierzu auch DIESTEL[38, Th. 1.8].

In einer vielzitierten Arbeit [19] haben C. BESSAGA und A. PEŁCZYŃSKI 1958 gezeigt, daß die $\sigma(E,E')$-Σ-vollständigen BANACH-Räume genau die BANACH-Räume sind, die keinen zu $(c_0,\|\cdot\|_\infty)$ isomorphen Teilraum enthalten. Für nicht notwendig lokalkonvexe Räume hat man zunächst keinen Ersatz für den Begriff "$\sigma(E,E')$-Σ-vollständig". Aus Satz (1.19), Lemma (1.13) und Satz (1.9) ersieht man, daß eine Familie $(x_\iota;\iota\in I)$ genau dann die $\sigma(E,E')$-CAUCHY-Bedingung erfüllt, wenn $(x_\iota;\iota\in I)$ die $c_0(I)$-CAUCHY-Bedingung erfüllt und das ist genau dann der Fall, wenn $\Gamma(\$[x](\mathcal{F}(I))$ beschränkt ist. Man kann also den Begriff "$\sigma(E,E')$-Σ-vollständig" wie folgt auf topologische lineare Räume übertragen:

<u>(3.12) Definition.</u> Ein separierter topologischer linearer Raum $(E,\mathcal{R})$ heißt C-Raum, wenn jede Folge $(x_n;n\in\mathbb{N})$ in E, die die c_0-CAUCHY-Bedingung erfüllt, bereits summierbar ist.

Der Begriff des C-Raumes wurde zuerst von SCHWARTZ[116, p. 704] und THOMAS[120, p. 9] in einer geringfügig abweichenden Form verwendet. Für die dort vorwiegend betrachteten vollständigen Räume stimmt ihre Definition mit (3.12) überein.

Offenbar sind beliebige Produkte von C-Räumen und (Folgen-) abgeschlossene Teilräume von C-Räumen wieder C-Räume.

Kürzlich hat KALTON[75, p. 299] das Ergebnis von BESSAGA und PEŁCZYŃSKI auf vollständige topologische lineare Räume übertragen:

<u>(3.13) Satz</u> (KALTON[75, p. 299]). Ein vollständiger topologischer linearer Raum ist genau dann ein C-Raum, wenn er keinen zu $(c_0,\|\cdot\|_\infty)$ isomorphen Teilraum enthält.

Wir wollen zunächst an einem einfachen Beispiel sehen, daß in diesem Satz die Vollständigkeitsvoraussetzung nicht überflüssig ist.

<u>(3.14) Beispiel.</u> $E := \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, $\mathcal{R} := \|\cdot\|_2$ -Topologie. $F := \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, $\mathcal{T} :=$ relative Produkttopologie von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Diese Räume sind nicht σ-Σ-vollständig, denn "σ-Σ-vollständig" impliziert nach (3.5) "Σ-vollständig" in der Ausgangstopologie und für metrisierbare Räume impliziert "Σ-vollständig" nach (3.6) "vollständig". Seien $G \subset E$, $H \subset F$ lineare Teilräume, die vermöge $T: (G, \mathcal{R} \cap G) \longrightarrow (H, \mathcal{T} \cap H)$ topologisch isomorph sind. Dann besitzt T eine eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung zu einem Isomorphismus der vollständigen Hüllen: $\tilde{T}: (\tilde{G}, \widetilde{\mathcal{R} \cap G}) \longrightarrow (\tilde{H}, \widetilde{\mathcal{T} \cap H})$. $\widetilde{\mathcal{R} \cap G}$ ist eine BANACH-Raum-Topologie und $\widetilde{\mathcal{T} \cap H}$ ist als vollständige schwache Topologie die Topologie eines Geradenproduktes (vgl. BOURBAKI[26, p. 102]). Es folgt daher $\dim \tilde{G} = \dim \tilde{H} < \infty$.

Ohne zusätzliche Vollständigkeitsvoraussetzungen kann die Eigenschaft "nicht σ-Σ-vollständig" also nicht durch "enthält Teilraum isomorph zu ? " charakterisiert werden.

Wie das Beispiel $(c_o, \sigma(c_o, l^1))$ zeigt, wird Satz (3.13) auch falsch, wenn man "vollständig" durch "MACKEY-Folgen-vollständig" ersetzt. Andererseits liefert eine Analyse der Resultate von KALTON, daß eine Vollständigkeitsvoraussetzung, die schwächer als "Σ-vollständig" ist, bereits ausreicht:

<u>(3.15) Satz.</u> In dem separierten topologischen linearen Raum $(E, \mathcal{R})$ sei jede Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$, die die l^∞-CAUCHY-Bedingung erfüllt, summierbar. Dann gilt:
$(E, \mathcal{R})$ ist genau dann ein C-Raum, wenn er keinen zu $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$ isomorphen Teilraum enthält.

<u>Beweis:</u> $(E, \mathcal{R})$ enthalte keinen zu $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$ isomorphen Teilraum. $(x_n; n \in \mathbb{N})$ sei eine Folge in E, die die c_o-CAUCHY-Bedingung erfüllt. Für jedes $\lambda = (\lambda_n; n \in \mathbb{N}) \in c_o$ erfüllt dann die Folge $(\lambda_n x_n; n \in \mathbb{N})$ die l^∞-CAUCHY-Bedingung, ist also nach Voraussetzung summierbar in $(E, \mathcal{R})$. Wie beim Beweis "(g) $\Longrightarrow$ (a)" von Satz (1.20) folgt nun, daß durch $T: (c_o, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \mathcal{R})$, $T(\lambda) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n x_n$ $(\lambda = (\lambda_n; n \in \mathbb{N}) \in c_o)$ eine stetige lineare Abbildung gegeben ist. Nach KALTON[75, Th. 2.3] folgt $T(e_n) = x_n \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ in $(E, \mathcal{R})$. Jede Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in $(E, \mathcal{R})$, die die c_o-CAUCHY-Bedingung erfüllt, ist also eine Nullfolge. Wie beim Beweis zu Satz (1.5) zeigt man, daß daraus folgt: Jede Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in $(E, \mathcal{R})$, die die

c_o-CAUCHY-Bedingung erfüllt, erfüllt auch die l^∞ -CAUCHY-Bedingung; nach Voraussetzung ist diese Folge summierbar.

Enthält $(E,\mathfrak{R})$ einen zu $(c_o,\|\cdot\|_\infty)$ isomorphen Teilraum, so erfüllt die nicht summierbare Folge $(e_n;n\in\mathbb{N})$ die c_o-CAUCHY-Bedingung. ./.

II. Kapitel

Der Satz von ORLICZ - PETTIS

In §4 wird zu einem dualen Paar $\langle E,F\rangle$ die feinste polare Topologie charakterisiert, die die gleichen TF-summierbaren bzw. BM-summierbaren Familien wie $\sigma(E,F)$ besitzt. Dieser Satz enthält die bekannten Sätze vom ORLICZ-PETTIS-Typ für duale Paare und neue Aussagen von diesem Typ.

In §5 wird gezeigt, daß es zu einer kommutativen topologischen Gruppe $(E,\mathcal{R})$ unter allen $\mathcal{R}$-polaren Gruppentopologien $\mathcal{T}$ auf E, die vom abzählbaren Typ sind, eine feinste gibt, die mit $\eta(\mathcal{R})$ bezeichnet wird. Anschließend wird bewiesen, daß die Ausgangstopologie $\mathcal{R}$ und die obere Grenze $\eta(\mathcal{R})\vee\mathcal{R}$ stets die gleichen TF-summierbaren Familien besitzen.

§ 4 Sätze vom ORLICZ - PETTIS - Typ für lokalkonvexe Räume.

Zum Beweis der Hauptsätze dieses Paragraphen benötigen wir wesentliche Eigenschaften des dualen Paares $\langle l^1(I),m_o(I)\rangle$, wobei wie schon in § 1 $m_o(I):=\{z:I\longrightarrow\mathbb{K};\ z(I)\text{ endlich}\}$ gesetzt ist. Wir beweisen deshalb zunächst einige Hilfsaussagen.

(4.1) Satz. Sei $I\neq\emptyset$ eine Indexmenge. Für eine Folge $(x^n;n\in\mathbb{N})$ in $l^1(I)$ sind äquivalent:

(a) $(x^n;n\in\mathbb{N})$ ist $\sigma(l^1(I),m_o(I))$-konvergent.

(b) $(x^n;n\in\mathbb{N})$ ist $\|\cdot\|_1$-konvergent.

Insbesondere haben also $\sigma(l^1(I),m_o(I))$ und die $\|\cdot\|_1$-Topologie auf $l^1(I)$ die gleichen beschränkten Mengen.

Für eine Teilmenge K von $l^1(I)$ sind äquivalent:

(c) K ist $\sigma(l^1(I),m_o(I))$-kompakt.

(d) K ist $\|\cdot\|_1$-kompakt.

(e) K ist in $\mathbb{K}^I$ beschränkt, in $(l^1(I),\|\cdot\|_1)$ abgeschlossen und zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\sigma\in\mathcal{F}(I)$ mit der Eigenschaft:

$$\tau\in\mathcal{F}(I),\quad \tau\cap\sigma=\emptyset\Longrightarrow\sum_{\iota\in\tau}|x_\iota|\leq\varepsilon\quad\text{für alle } x\in K.$$

Beweis:

(a) $\Longrightarrow$ (b): O.E. können wir $x^n\longrightarrow 0$ $(n\longrightarrow\infty)$ bezüglich $\sigma(l^1(I),m_o(I))$ annehmen. Ist $(x^n;n\in\mathbb{N})$ keine $\|\cdot\|_1$-Nullfolge, so gibt es eine Teilfolge $n:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ mit $\|x^{n(k)}\|_1\geq 2\varepsilon$ für ein $\varepsilon>0$ und alle $k\in\mathbb{N}$. Wegen $\|x^n\|_1=\|\mathrm{Re}\,x^n+i\,\mathrm{Im}\,x^n\|_1\leq\|\mathrm{Re}\,x^n\|_1+\|\mathrm{Im}\,x^n\|_1$ kann man o.E. $\|\mathrm{Re}\,x^{n(k)}\|_1\geq\varepsilon$ für alle $k\in\mathbb{N}$ annehmen. Wir setzen $u^n:=\mathrm{Re}\,x^n$ $(n\in\mathbb{N})$.

Beh.: Es gibt Folgen $(\tau(i);i\in\mathbb{N})$, $(\sigma(i);i\in\mathbb{N})$ in $\mathcal{F}(I)$ und Teilfolgen $n,n':\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:

(1) $\sum_{\iota\in\tau(i)}|u_\iota^{n(i)}|\geq\varepsilon/2$ $(i\in\mathbb{N})$.

(2) $\tau(i+1)\cap\sigma(i)=\emptyset$ $(i\in\mathbb{N})$.

(3) $\sigma(i)\supset\tau(j)\cup\sigma(j)$ $(j\leq i,\ i,j\in\mathbb{N})$.

(4) $\sum_{\iota\notin\sigma(i)}|u_\iota^{n(i)}| \leq \varepsilon/8 \quad (i\in\mathbb{N})$.

(5) $n'(i+1) > n(i+1) > n'(i) \quad (i\in\mathbb{N})$.

(6) $\sum_{\iota\in\sigma(i)}|u_\iota^{k}| \leq \varepsilon/8$ für alle $k \geq n'(i) \quad (i\in\mathbb{N})$.

<u>Bew.:</u>

$\exists\, n(1)\geq 1:\ \|u^{n(1)}\|_1 \geq \varepsilon \implies \exists\, \tau(1)\in\mathcal{F}(I)$ mit $\sum_{\iota\in\tau(1)}|u_\iota^{n(1)}| \geq \varepsilon/2$.

$\|u^{n(1)}\|_1 < \infty \implies \exists\, \sigma(1)\in\mathcal{F}(I),\ \sigma(1)\supset\tau(1)$ mit $\sum_{\iota\notin\sigma(1)}|u_\iota^{n(1)}| \leq \varepsilon/8$.

Sei $e_\iota(\kappa) := \delta_{\iota\kappa}\ (\iota,\kappa\in I)$ gesetzt. Dann gilt $e_\iota\in m_0(I)\ (\iota\in I)$. Daraus erhält man $\langle u^n, e_\iota\rangle = u_\iota^n \longrightarrow 0\ (n\to\infty)$ für alle $\iota\in I$. Da $\sigma(1)$ endlich ist, gibt es ein $n'(1) > n(1)$ mit der Eigenschaft $\sum_{\iota\in\sigma(1)}|u_\iota^{k}| \leq \varepsilon/8$ für alle $k\geq n'(1)$.

Seien nun alle Größen bis zum Index l schon konstruiert. $\implies$ $\exists\, n(l+1) > n'(l)$ mit $\|u^{n(l+1)}\|_1 \geq \varepsilon$. $\sum_{\iota\notin\sigma(l)}|u_\iota^{n(l+1)}| \geq \varepsilon - \varepsilon/8 > \varepsilon/2 \implies \exists\, \tau(l+1)\in\mathcal{F}(I),\ \tau(l+1)\cap\sigma(l) = \emptyset$ mit $\sum_{\iota\in\tau(l+1)}|u_\iota^{n(l+1)}| \geq \varepsilon/2$. Wegen $\|u^{n(l+1)}\|_1 < \infty$ gibt es ein $\sigma(l+1)\in\mathcal{F}(I),\ \sigma(l+1)\supset\sigma(l)\cup\tau(l+1)$ mit $\sum_{\iota\notin\sigma(l+1)}|u_\iota^{n(l+1)}| \leq \varepsilon/8$. Zu $\sigma(l+1)\in\mathcal{F}(I)$ gibt es ein $n'(l+1) > n(l+1)$ mit

$\sum_{\iota\in\sigma(l+1)}|u_\iota^{k}| \leq \varepsilon/8$ für alle $k\geq n'(l+1)$. ./.

Wir setzen nun $z_\iota := \operatorname{sgn}(u_\iota^{n(k)})$ für $\iota\in\tau(k)$, $z_\iota := 0$ für $\iota\notin\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\tau(k)$. $\implies z(I)\subset\{-1,0,1\} \implies z\in m_0(I)$.

$$\begin{aligned}\langle u^{n(l)}, z\rangle &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{\iota\in\tau(k)} u_\iota^{n(l)}\cdot\operatorname{sgn}(u_\iota^{n(k)})\Big) \geq \\ &\geq \sum_{\iota\in\tau(l)}|u_\iota^{n(l)}| - \sum_{k=1}^{l-1}\Big(\sum_{\iota\in\tau(k)}|u_\iota^{n(l)}|\Big) - \sum_{k=l+1}^{\infty}\Big(\sum_{\iota\in\tau(k)}|u_\iota^{n(l)}|\Big) \geq \\ &\geq \sum_{\iota\in\tau(l)}|u_\iota^{n(l)}| - \sum_{\iota\in\sigma(l-1)}|u_\iota^{n(l)}| - \sum_{\iota\notin\sigma(l)}|u_\iota^{n(l)}| \geq \\ &\geq \varepsilon/2 - \varepsilon/8 - \varepsilon/8 = \varepsilon/4 \quad \text{für alle } l\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

$\implies \operatorname{Re}\langle x^{n(l)}, z\rangle = \langle \operatorname{Re} x^{n(l)}, z\rangle \geq \varepsilon/4$ für alle $l\in\mathbb{N}$.

$\implies (x^{n(l)}; l\in\mathbb{N})$ ist keine $\sigma(l^1(I), m_0(I))$ - Nullfolge.

"(b) $\implies$ (a)" und "(d) $\implies$ (c)" sind unmittelbar zu sehen. Die Äquivalenz von (d) und (e) beweist man analog zum Spezialfall $I = \mathbb{N}$, der z.B. bei TREVES[126, p. 451] behandelt ist.

Es bleibt "(c) $\implies$ (d)" zu zeigen. Sei K eine $\sigma(l^1(I), m_0(I))$-kompakte Teilmenge von $l^1(I)$ und $(x^n; n\in\mathbb{N})$ eine Folge

in K. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge J von I mit $x_\iota^n = 0$ für alle $\iota \notin J$, $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten $l^1(J)$ als Teilraum von $l^1(I)$. Wegen $\mathbb{K}^{(I)} \subset m_0(I)$ ist $l^1(J)$ abgeschlossen in $(l^1(I), \sigma(l^1(I), m_0(I)))$. Daher ist $K_1 := K \cap l^1(J)$ eine kompakte Teilmenge von $(l^1(J), \sigma(l^1(J), m_0(I)))$. Wegen der Abzählbarkeit von J ist $\sigma(l^1(J), \mathbb{K}^{(J)})$ metrisierbar und es gilt $\sigma(l^1(J), \mathbb{K}^{(J)}) \cap K_1 = \sigma(l^1(J), m_0(I)) \cap K_1$. Daher gibt es eine $\sigma(l^1(J), m_0(I))$-konvergente Teilfolge $(x^{n(k)}; k \in \mathbb{N})$ zu $(x^n; n \in \mathbb{N})$ und diese ist nach (a) auch $\|\cdot\|_1$-konvergent. ./.

Die Analyse des Beweises zu Satz (4.1) liefert noch folgende Charakterisierung:

<u>(4.2) Satz.</u> Für einen linearen Teilraum H von $l^\infty(I)$ mit $\mathbb{K}^{(I)} \subset H$ betrachten wir auf $l^\infty(I)$ die Topologie $\mathcal{T}$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen $\sigma(l^1(I), H)$-Nullfolgen. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\overline{H}^{\mathcal{T}} = l^\infty(I)$.

(b) $\sigma(l^1(I), H)$ und die $\|\cdot\|_1$-Topologie haben die gleichen konvergenten Folgen.

(c) $\sigma(l^1(I), H)$ und die $\|\cdot\|_1$-Topologie haben die gleichen kompakten Mengen.

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so gilt $(l^\infty(I), \mathcal{T})' = l^1(I)$.

<u>Beweis:</u>

<u>(a) $\Longrightarrow$ (b):</u> Sei $(x^n; n \in \mathbb{N})$ eine $\sigma(l^1(I), H)$-Nullfolge. Ist $(x^n; n \in \mathbb{N})$ keine $\|\cdot\|_1$-Nullfolge, so kann man wegen $\mathbb{K}^{(I)} \subset H$ wie beim Beweis zu Satz (4.1) eine Teilfolge $n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ und ein $z \in m_0(I)$ so konstruieren, daß mit einem $\varepsilon > 0$ die Beziehung $\operatorname{Re} \langle x^{n(l)}, z \rangle \geq \varepsilon/4$ für alle $l \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Wegen $\overline{H}^{\mathcal{T}} = l^\infty(I)$ gibt es zu der $\sigma(l^1(I), H)$-Nullfolge $(x^n; n \in \mathbb{N})$ und zu $z \in m_0(I)$ ein $w \in H$ mit $|\langle z-w, x^n \rangle| \leq \varepsilon/8$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit erhält man $\operatorname{Re} \langle x^{n(l)}, w \rangle = \operatorname{Re} \langle x^{n(l)}, z \rangle + \operatorname{Re} \langle x^{n(l)}, w-z \rangle \geq \varepsilon/4 - \varepsilon/8 = \varepsilon/8$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

<u>(b) $\Longrightarrow$ (c):</u> Hier kann man direkt den Beweis für "(c) $\Longrightarrow$ (d)" aus Satz (4.1) übernehmen.

<u>(c) $\Longrightarrow$ (a):</u> Man sieht unmittelbar $\sigma(l^\alpha(I), l^1(I)) \subset \mathcal{T}$. Sei $(x^n; n \in \mathbb{N})$ eine $\sigma(l^1(I), H)$-Nullfolge. Dann ist $\{x^n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ $\sigma(l^1(I), H)$-kompakt, also auch $\|\cdot\|_1$-kompakt. Deshalb ist auch $K := \overline{\Gamma(\{x^n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})}^{\|\cdot\|_1}$ kompakt in der $\|\cdot\|_1$-Topologie und daher auch $\sigma(l^1(I), l^\infty(I))$-kompakt. Man erhält also $\mathcal{T} \subset \tau(l^\infty(I), l^1(I))$ und daraus $l^\infty(I) = \overline{\mathbb{K}^{(I)}}^{\mathcal{T}} \subset \overline{H}^{\mathcal{T}} \subset l^\infty(I)$. ./.

Für $H := l^\infty(I)$ liefert (4.2) klassische Resultate (KÖTHE[80, p.284]).

Nach diesen Vorbereitungen können wir den folgenden Satz vom ORLICZ-PETTIS-Typ beweisen. Die Anregung zu diesem Satz verdanke ich Herrn PFISTER.

Im folgenden kürzen wir $l^1(\mathbb{N})$ bzw. $m_o(\mathbb{N})$ wieder durch l^1 bzw. m_o ab.

<u>(4.3) Satz.</u> Sei $\langle E,F\rangle$ ein duales Paar, $\mathfrak{M} := \{M \subset F;\ M$ beschränkt und für jede stetige lineare Abbildung $T: (m_o, \sigma(m_o,l^1)) \longrightarrow (E, \sigma(E,F))$ ist $T^t(M)$ präkompakt in $(l^1, \|\cdot\|_1)\}$. $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ bezeichne die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Elementen aus $\mathfrak{M}$. Dann gilt:

(a) $\mathfrak{M}$ ist gesättigt. $\sigma(E,F)$ und $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ haben die gleichen TF-summierbaren Familien.

(b) Ist $\mathfrak{N}$ ein gesättigtes System beschränkter Teilmengen von F mit $\sigma(E,F) \subset \mathcal{T}(\mathfrak{N})$, so haben $\sigma(E,F)$ und $\mathcal{T}(\mathfrak{N})$ genau dann die gleichen TF-summierbaren Familien, wenn $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ gilt.

$\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ ist also die feinste polare Topologie zu $\langle E,F\rangle$ (im Sinne von ROBERTSON, ROBERTSON[106, p. 55]), die die gleichen TF-summierbaren Familien wie $\sigma(E,F)$ besitzt.

<u>Beweis:</u>

<u>Zu (a):</u> Es ist unmittelbar zu sehen, daß gilt:

$B \in \mathfrak{M},\ A \subset B \Longrightarrow A \in \mathfrak{M}$.

$B \in \mathfrak{M},\ \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda B \in \mathfrak{M}$.

$A,\ B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \overline{\Gamma(A \cup B)} \in \mathfrak{M}$.

$\mathfrak{M}$ ist also gesättigt (KÖTHE[80, p. 257]). Offenbar gilt $\sigma(E,F) \subset \mathcal{T}(\mathfrak{M})$. Es genügt daher zu zeigen, daß jede $\sigma(E,F)$-TF-summierbare Familie auch $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$-TF-summierbar ist. Da $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ eine Nullumgebungsbasis aus $\sigma(E,F)$-abgeschlossenen Mengen besitzt, genügt es nach Satz (3.4) zu zeigen, daß jede $\sigma(E,F)$-TF-summierbare Familie $(x_\iota; \iota \in I)$ die $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$-CAUCHY-Bedingung erfüllt. Nach Satz (1.5) kann man sich dazu auf den Fall $I = \mathbb{N}$ beschränken. Zu der $\sigma(E,F)$-TF-summierbaren Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ definieren wir eine lineare Abbildung $T: m_o \longrightarrow E$ durch $T(\chi_J) := \sum_{\iota \in J} x_\iota$ $(J \subset \mathbb{N})$ und lineare Fortsetzung. Sei $T^*: E^* \longrightarrow m_o^*$ die algebraisch transponierte Abbildung zu T und $x' \in F \subset E^*$. Dann gilt für alle $J \subset \mathbb{N}$:

$$\langle T^*(x'), \chi_J \rangle_{\langle m_o^*, m_o\rangle} = \langle x', T(\chi_J)\rangle_{\langle F,E\rangle} = \langle x', \sum_{\iota \in J} x_\iota \rangle = \sum_{\iota \in J} \langle x', x_\iota \rangle$$

$$= \sum_{\iota \in \mathbb{N}} \langle x', x_\iota \rangle \chi_J(\iota) = \langle (\langle x', x_\iota \rangle; \iota \in \mathbb{N}), \chi_J \rangle_{\langle l^1, m_o\rangle},$$

denn es ist $\sum_{\iota \in \mathbb{N}} |\langle x', x_\iota \rangle| < \infty$ für alle $x' \in F$. Damit folgt $T^*(F) \subset l^1$. Also ist $T: (m_o, \sigma(m_o, l^1)) \longrightarrow (E, \sigma(E,F))$ stetig und es gilt:

$T^t(x') = (\langle x', x_\iota\rangle ; \iota \in \mathbb{N})$ für alle $x' \in F$.

Beh.:

$$(*)\quad \left.\begin{array}{l} T^t(M) \text{ präkompakt in} \\ (l^1, \|\cdot\|_1)\ \forall\ M \in \mathfrak{M} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x_\iota ; \iota \in \mathbb{N}) \text{ erfüllt die } \mathcal{F}(\mathfrak{M})\text{-} \\ \text{CAUCHY-Bedingung.} \end{array}\right.$$

Bew.:

"$\Longrightarrow$" Sei $V \in \mathfrak{U}_0(E, \mathcal{F}(\mathfrak{M})) \Longrightarrow \exists\ M \in \mathfrak{M} : M^0 \subset V$.
$T^t(M)$ präkompakt in $(l^1, \|\cdot\|_1) \Longrightarrow \exists\ \sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit der Eigenschaft: $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}),\ \tau \cap \sigma = \emptyset \Longrightarrow \sum_{\iota \in \tau} |\langle x', x_\iota\rangle| \leq 1\ \ \forall\ x' \in M$.
$\Longrightarrow |\langle x', \sum_{\iota \in \tau} x_\iota\rangle| \leq 1$ für alle $x' \in M. \Longrightarrow (\sum_{\iota \in \tau} x_\iota) \in M^0 \subset V$.
$\Longrightarrow (x_\iota ; \iota \in \mathbb{N})$ erfüllt die $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$-CAUCHY-Bedingung.

"$\Longleftarrow$" $(x_\iota ; \iota \in \mathbb{N})$ erfülle die $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$-CAUCHY-Bedingung. Sei $\varepsilon > 0$ und $M \in \mathfrak{M}. \Rightarrow (\frac{1}{\varepsilon} M)^0 \in \mathfrak{U}_0(E, \mathcal{F}(\mathfrak{M}))$. Mit (1.16c) folgt: $\exists\ \sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit: $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}), \tau \cap \sigma = \emptyset \Longrightarrow \sum_{\iota \in \tau} |\langle x', x_\iota\rangle| \leq 1\ \ \forall\ \ x' \in (\frac{1}{\varepsilon} M)^{00}$. Hieraus folgt $\sum_{\iota \in \tau} |\langle T^t(z'), \chi_{\{\iota\}}\rangle| \leq \varepsilon\ \ \ \forall\ z' \in M$ und alle $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit $\tau \cap \sigma = \emptyset$.
Mit der Beschränktheit von $T^t(M)$ und (4.1e) folgt die Behauptung.

Mit dieser Äquivalenz folgt unmittelbar, daß $(x_\iota ; \iota \in \mathbb{N})$ die $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$-CAUCHY-Bedingung erfüllt.

Zu (b): Gilt $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, so folgt $\sigma(E,F) \subset \mathcal{F}(\mathfrak{N}) \subset \mathcal{F}(\mathfrak{M})$. Also haben $\sigma(E,F)$ und $\mathcal{F}(\mathfrak{N})$ nach (a) die gleichen TF-summierbaren Familien.

Nun sei $\mathfrak{N}$ ein gesättigtes System beschränkter Teilmengen von F derart, daß $\sigma(E,F)$ und $\mathcal{F}(\mathfrak{N})$ die gleichen TF-summierbaren Familien besitzen. Sei $N \in \mathfrak{N}$ und $T : (m_0, \sigma(m_0, l^1)) \longrightarrow (E, \sigma(E,F))$ sei stetig und linear. Die durch $x_\iota := T(\chi_{\{\iota\}})$ $(\iota \in \mathbb{N})$ definierte Folge ist $\sigma(E,F)$-TF-summierbar, erfüllt also insbesondere die $\mathcal{F}(\mathfrak{N})$-CAUCHY-Bedingung. Nach "$\Longleftarrow$" aus (*) von oben (mit $\mathfrak{N}$ statt $\mathfrak{M}$) folgt, daß $T^t(N)$ präkompakt in $(l^1, \|\cdot\|_1)$ ist. Damit folgt $N \in \mathfrak{M}$, d.h. $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. ./.

Wie Beispiel (4.10) zeigt, ist $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ i.a. echt feiner als $\tau(E,F)$.

Bevor wir in einem Korollar einige Beispiele für Mengensysteme $\mathfrak{N}$ angeben, benötigen wir folgende Definition.

(4.4) Definition. Sei $\langle E,F\rangle$ ein duales Paar. $A' \subset F$ heißt begrenzt, wenn jede $\sigma(E,F)$-Nullfolge auf A' gleichmäßig gegen Null konvergiert (vgl. KÖTHE[79, p. 77]).

In (11.4b) werden wir zeigen, wie man mit einer Modifikation des Begriffes "begrenzt" weitere Sätze vom ORLICZ-PETTIS-Typ erhalten kann.

<u>(4.5) Korollar.</u> Sei $\langle E,F\rangle$ ein duales Paar. Ist $\mathfrak{N}$ die Sättigung eines der folgenden Mengensysteme, so haben $\sigma(E,F)$ und $\mathcal{F}(\mathfrak{N})$ die gleichen TF-summierbaren Familien.

(a) $\mathfrak{N}_1 := \{N \subset F;\ N$ ist $\sigma(F,E)$-kompakt$\}$.

(b) $\mathfrak{N}_2 := \{N \subset F;\ N$ ist $\beta(F,E)$-präkompakt$\}$.

(c) $\mathfrak{N}_3 := \{N \subset F;\ N$ ist relativ $\sigma(F,E)$-abzählbar kompakt$\}$.

(d) $\mathfrak{N}_4 := \{N \subset F;\ N$ ist beschränkt und die relative $\sigma(F,E)$-Uniformität auf N ist metrisierbar$\}$.

(e) $\mathfrak{N}_5 := \{N \subset F;$ Jede Folge in N enthält eine $\sigma(F,E)$-CAUCHY-Teilfolge$\}$.

(f) $\mathfrak{N}_6 := \{N \subset F;\ N$ ist begrenzt$\}$.

<u>Beweis:</u> Da $\mathfrak{M}$ aus (4.3) gesättigt ist, genügt es $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{M}$ $(i = 1,\dots,6)$ zu beweisen. Im folgenden sei $T: m_o \longrightarrow E$ stets eine $\sigma(m_o,l^1)$- $\sigma(E,F)$-stetige lineare Abbildung.

<u>Zu (a):</u> Ist $N \in \mathfrak{N}_1$, so ist $T^t(N)$ kompakt bezüglich $\sigma(l^1,m_o)$, also auch $\|\cdot\|_1$-kompakt nach Satz (4.1). Es folgt $N \in \mathfrak{M}$.

<u>Zu (b):</u> Wegen $\sigma(m_o,l^1) = \sigma(l^\infty,l^1) \cap m_o$ sind die $\sigma(m_o,l^1)$-beschränkten Teilmengen von m_o gerade die $\|\cdot\|_\infty$-beschränkten Teilmengen. Für $x \in l^1$ gilt:
$\|x\|_1 = \sup\{|\langle z,x\rangle|\ ;\ z \in l^\infty,\ \|z\|_\infty \leq 1\} \geq \sup\{|\langle y,x\rangle|\ :\ y \in m_o,\ \|y\|_\infty \leq 1\}$.
Zu $z \in l^\infty$, $\|z\|_\infty \leq 1$, existiert eine Folge $(y_n; n \in \mathbb{N})$ in m_o mit $\|y_n\|_\infty \leq 1$ und $\|y_n - z\|_\infty \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$. Damit folgt:
$\|x\|_1 = \sup\{|\langle y,x\rangle|\ ;\ y \in m_o,\ \|y\|_\infty \leq 1\}. \Longrightarrow \beta(l^1,m_o) = \beta(l^1,l^\infty) =$ $\|\cdot\|_1$-Topologie. Mit $T: (m_o, \sigma(m_o,l^1)) \longrightarrow (E, \sigma(E,F))$ ist auch $T^t: (F, \beta(F,E)) \longrightarrow (l^1, \beta(l^1,m_o))$ stetig. Für jedes $N \in \mathfrak{N}_2$ ist also $T^t(N)$ $\beta(l^1,m_o)$-präkompakt und damit $\|\cdot\|_1$-präkompakt. Es folgt $N \in \mathfrak{M}$.

<u>Zu (c):</u> Ist $N \in \mathfrak{N}_3$, so ist $T^t(N)$ relativ $\sigma(l^1,m_o)$-abzählbar kompakt und damit wegen der Metrisierbarkeit von $\sigma(l^1, \mathbb{K}^{(\mathbb{N})})$ relativ Folgen-kompakt bezüglich $\sigma(l^1,m_o)$ nach KÖTHE[80, p. 314 (3)]. Mit Satz (4.1) folgt, daß $T^t(N)$ präkompakt in $(l^1, \|\cdot\|_1)$ ist.

<u>Zu (d):</u> $\mathfrak{N}_4 \subset \mathfrak{N}_5$, denn: $N \in \mathfrak{N}_4 \Longrightarrow N$ ist $\sigma(F,E)$-präkompakt. $\Longrightarrow$ Jede Folge in N enthält ein CAUCHY-Teilnetz. Wegen der Metrisierbarkeit der auf N relativierten $\sigma(F,E)$-Uniformität kann dieses Teilnetz als CAUCHY-Teilfolge gewählt werden.

Es genügt also $\mathfrak{N}_5 \subset \mathfrak{M}$ zu zeigen.

<u>Zu (e):</u> Ist $N \in \mathfrak{N}_5$, so enthält jede Folge in $T^t(N)$ eine $\sigma(l^1,m_o)$-CAUCHY-Teilfolge. Da $\sigma(l^1,m_o)$ und die $\|\cdot\|_1$-Topologie

die gleichen konvergenten Folgen besitzen, besitzen sie auch die gleichen CAUCHY-Folgen. Obige $\sigma(l^1,m_o)$-CAUCHY-Folge ist also eine $\|\cdot\|_1$-CAUCHY-Folge.

Jede Folge in $T^t(N)$ enthält also eine $\|\cdot\|_1$-CAUCHY-Teilfolge. Daraus folgt die $\|\cdot\|_1$-Präkompaktheit von $T^t(N)$.

Zu (f): Ein Beweis für $\mathfrak{N}_6 \subset \mathfrak{M}$ ergibt sich leicht aus Eigenschaften der assoziierten Folgen-Topologie, auf die wir in §11 ausführlicher eingehen. Wir werden den Beweis für $\mathfrak{N}_6 \subset \mathfrak{M}$ in (11.4b) nachtragen. ./.

(4.6) Bemerkungen.

(a) Bei BENNETT, KALTON[17, p.563] wird mit Methoden aus dem Beweis zu Satz (4.3) bewiesen, daß $\mathcal{T}(\mathfrak{N}_1)$ und $\sigma(E,F)$ die gleichen TF-summierbaren Folgen besitzen.
Weiterhin wird angegeben, daß man in dieser Aussage die Topologie $\mathcal{T}(\mathfrak{N}_1)$ auch durch $\mathcal{T}(\mathfrak{N}_3)$ (in der Notation von (4.5)) und durch die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den $\tau(F,E)$-präkompakten Teilmengen von F ersetzen kann. Diese letzte Aussage ist jedoch nicht richtig:
* In (12.7) werden wir zeigen, daß $\tau(l^1,m_o) = \sigma(l^1,m_o)$ gilt. Daraus folgt, daß die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den $\tau(l^1,m_o)$-präkompakten Teilmengen von l^1 mit $\beta(m_o,l^1)$ übereinstimmt. Aus Satz (4.1) folgt, daß die $\sigma(l^1,m_o)$-beschränkten Mengen und die $\|\cdot\|_1$-beschränkten Mengen in l^1 übereinstimmen. Deshalb ist $\beta(m_o,l^1)$ gerade die $\|\cdot\|_\infty$-Topologie. Die Folge $(e_n;n\in\mathbb{N})$ der "Einheitsvektoren" in m_o ist zwar $\sigma(m_o,l^1)$-TF-summierbar, jedoch nicht summierbar in der $\|\cdot\|_\infty$-Topologie.

Mit dem Satz von ORLICZ-PETTIS erhält man aus obigem Beispiel $\beta(m_o,l^1) \neq \tau(m_o,l^1)$. (Dies kann man natürlich auch direkt beweisen.) Daher ist $(m_o, \tau(m_o,l^1))$ nicht tonneliert, also ist auch $(l^1, \sigma(l^1,m_o))$ nicht quasi-vollständig. $(l^1, \sigma(l^1,m_o))$ ist jedoch Folgen-vollständig, denn nach Satz (4.1) haben $\sigma(l^1,m_o)$ und die $\|\cdot\|_1$-Topologie die gleichen konvergenten Folgen, also auch die gleichen CAUCHY-Folgen. *

(b) Für Eigenschaften begrenzter Mengen und Charakterisierungen von Mengen aus $\mathfrak{N}_5$ vergleiche man GROTHENDIECK[59, p. 286 ff]. Aufgabe 3 aus loc. cit., p. 287 ist falsch gestellt, wie man mit $\langle \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \rangle$ und der Folge $(e_n;n\in\mathbb{N})$ der "Einheitsvektoren" sieht.

(c) Auf die Topologie $\mathcal{T}(\mathfrak{N}_4)$ (in der Notation von (4.5)) werden wir im nächsten Paragraphen noch genauer eingehen.

Analog zu Satz (4.3) beweist man folgende "BM-Version" dieses Satzes.

<u>(4.7) Satz.</u> Sei $\langle E,F\rangle$ ein duales Paar, $\mathfrak{M}^* := \{M \subset F;\ M$ ist beschränkt und für jede stetige lineare Abbildung $T: (l^\infty, \sigma(l^\infty, l^1)) \longrightarrow (E, \sigma(E,F))$ ist $T^t(M)$ präkompakt in $(l^1, \|\cdot\|_1)\}$. Dann gilt:

(a) $\mathfrak{M}^*$ ist gesättigt. $\sigma(E,F)$ und $\mathcal{T}(\mathfrak{M}^*)$ haben die gleichen BM-summierbaren Familien.

(b) Ist $\mathfrak{N}^*$ ein gesättigtes System beschränkter Teilmengen von F mit $\sigma(E,F) \subset \mathcal{T}(\mathfrak{N}^*)$, so haben $\sigma(E,F)$ und $\mathcal{T}(\mathfrak{N}^*)$ genau dann die gleichen BM-summierbaren Familien, wenn $\mathfrak{N}^* \subset \mathfrak{M}^*$ gilt.

Die Topologie $\mathcal{T}(\mathfrak{M}^*)$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Elementen aus $\mathfrak{M}^*$ ist also die feinste polare Topologie zu $\langle E,F\rangle$, die die gleichen BM-summierbaren Familien wie $\sigma(E,F)$ besitzt.

Ein zu (4.5) analoges Korollar ließe sich hier unmittelbar anschließen.

Wir wollen hier noch genauer auf die Topologie $\mathcal{T}(\mathfrak{N}_1)$ (in der Notation von (4.5)) eingehen, die wir von jetzt an mit $\delta(E,F)$ bezeichnen. Daß $\delta(E,F)$ und $\sigma(E,F)$ die gleichen TF-summierbaren Folgen besitzen, wurde zuerst von TWEDDLE[129, p. 488] bewiesen.

<u>(4.8) Definition.</u> Sei $\langle E,F\rangle$ ein duales Paar. Mit $\delta(E,F)$ bezeichnen wir die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen $\sigma(F,E)$-kompakten Teilmengen von F.

<u>(4.9) Bemerkungen.</u>

(a) Da das System der $\sigma(F,E)$-kompakten Teilmengen von F zwar i.a. nicht gesättigt ist, jedoch die Bedingungen B1, B2 und B3 aus ROBERTSON, ROBERTSON[106, p. 55] erfüllt, erhält man eine Nullumgebungsbasis für $\delta(E,F)$ in der Form $\mathfrak{B}_0(E,\delta) := \{K^\circ;\ K \subset F,\ K$ ist $\sigma(F,E)$-kompakt$\}$.

(b) Unmittelbar aus der Definition von $\delta(E,F)$ erhält man die Inklusionen $\tau(E,F) \subset \delta(E,F) \subset \beta(E,F)$.

(c)* Aus den allgemeinen Resultaten von §10 (vgl. insbesondere (10.15)) erhält man:

Sind $(E,\mathcal{T})$ und $(F,\mathcal{Z})$ lokalkonvexe Räume und ist $T: (E,\mathcal{T}) \longrightarrow (F,\mathcal{Z})$ stetig und linear, so ist auch $T: (E,\delta(E,E')) \longrightarrow (F,\delta(F,F'))$ stetig. δ hat also funktorielle Eigenschaften. $*$

(d) In der Terminologie von CONWAY[32, p.475] heißt ein lokalkonvexer Raum $(E,\mathcal{T})$ "strong MACKEY space", wenn $\mathcal{T} = \delta(E,E')$ gilt. Wegen der Kollision mit "stark", werden wir diese Räume "strikte MACKEY-Räume" nennen.

<u>(4.10) Beispiel.</u> Am Beispiel des dualen Paares $\langle E,F\rangle$ mit $E := F := \mathbb{R}^{(I)}$, I eine unendliche Indexmenge, werden wir zeigen:

(a) Jede absolutkonvexe $\sigma(F,E)$-kompakte Teilmenge K von F ist endlich dimensional.

(b) $\sigma(E,F) = \tau(E,F) \subsetneqq \delta(E,F)$.

(c) $\sigma(E,F)$ ist die Topologie des lokalkonvexen induktiven Limes bezüglich aller abzählbar dimensionalen Teilräume $(H,\sigma(H,F))$ von $(E,\sigma(E,F))$. Da diese Teilräume $(H,\sigma(H,F))$ eine metrisierbare Topologie tragen, ist $\sigma(E,F)$ bornologisch. Es gilt also insbesondere $\sigma(E,F) = \beta^*(E,F)$.

(d)* $\sigma(E,F)$ stimmt mit der (in der Kategorie der lokalkonvexen Räume) zu $\sigma(E,F)$ assoziierten Folgen-Topologie $\mathcal{F}(\sigma(E,F))$ (vgl. §11) überein. Also gilt hier auch $\delta(E,F) \supsetneqq \mathcal{F}(\tau(E,F))$. $*$

(e) In $(E,\sigma(E,F))$ gibt es unendlich dimensionale summierbare Folgen, die nicht $\sigma(E,F)$-TF-summierbar sind. $\sigma(E,F)$ ist daher nicht Σ-vollständig.

<u>Zu (a):</u> Wir führen den Beweis indirekt und nehmen $\dim[K] = \infty$ an. Für $x \in \mathbb{R}^{(I)}$ setzen wir $\|x\| := \max\{|x_\iota| ; \iota \in I\}$, $\operatorname{carr}(x) := \{\iota \in I;\ x_\iota \neq 0\}$. Wegen $\dim[K] = \infty$ gibt es eine Folge $(x^n; n \in \mathbb{N})$ in K und eine Folge $(\iota(n); n \in \mathbb{N})$ in I mit den Eigenschaften:

(1) $\iota(i) \notin \operatorname{carr}(x^j)$ $(i \neq j,\ i,j \in \mathbb{N})$.

(2) $x^1_{\iota(1)} > x^2_{\iota(2)} \ldots > x^n_{\iota(n)} > \ldots > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

Dies sieht man wie folgt ein:

Wir wählen $x^1 \in K \setminus \{0\}$ und $\iota(1) \in \operatorname{carr}(x^1)$ beliebig. Da K insbesondere kreisförmig ist, können wir o.E. $x^1_{\iota(1)} > 0$ voraussetzen. Seien jetzt $x^1, \ldots, x^n$ mit den Eigenschaften (1) und (2) schon bestimmt. Dann gibt es ein $\hat{x}^{n+1} \in K$ mit $J := \operatorname{carr}(\hat{x}^{n+1}) \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{carr}(x^i)) \neq \emptyset$. Sei $\iota(n+1) \in J$ beliebig gewählt. Wegen der Kreisförmigkeit von K können wir wieder o.E. annehmen, daß $\hat{x}^{n+1}_{\iota(n+1)} > 0$ und $\|\hat{x}^{n+1}\| < x^n_{\iota(n)}$ gilt. Wir setzen

$$x^{n+1} := (n+1)^{-1} \cdot \hat{x}^{n+1} - (n+1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{x}^{n+1}_{\iota(i)}}{x^i_{\iota(i)}} \cdot x^i .$$

Dann gilt $x^{n+1} \in K$,

$x^{n+1}_{\iota(k)} = 0$ $(k = 1,\dots,n)$, $x^{n+1}_{\iota(n+1)} = (n+1)^{-1}\,\hat{x}^{n+1}_{\iota(n+1)} > 0$, $x^{n+1}_{\iota(n+1)} < \hat{x}^{n+1}_{\iota(n+1)} < x^{n}_{\iota(n)}$. Mit der Folge $(x^n; n\in\mathbb{N})$ bilden wir jetzt die Folge $y^n := \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\cdot x^k$ $(n\in\mathbb{N})$. Sei $\iota\in I$ und $p_\iota : \mathbb{R}^{(I)} \longrightarrow \mathbb{R}$ die kanonische Projektion. Dann gilt $p_\iota(y^n) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\cdot p_\iota(x^k) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\cdot x^k_\iota$. $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} p_\iota(y^n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\cdot x^k_\iota$ in $\mathbb{R}$ für alle $\iota\in I$. $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y^n = y := (\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\cdot x^k) \in K$, da K vollständig ist. Nun hat man $p_{\iota(k)}(y) = 2^{-k}\cdot p_{\iota(k)}(x^k) = 2^{-k}\cdot x^k_{\iota(k)} > 0$ für alle $k\in\mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch zu $K\subset\mathbb{R}^{(I)}$.

<u>Zu (b):</u> Ist $K\subset F$ absolutkonvex und $\sigma(F,E)$-kompakt, so gilt nach (a) $p_\iota(K)\subset\{0\}$ für alle $\iota\in I\setminus J$ mit $J\subset I$, J endlich. $\Longrightarrow$ $K^o \supset (\prod_{\iota\in I} Q_\iota)\cap\mathbb{R}^{(I)}$ mit $Q_\iota := \{0\}$ für $\iota\in J$, $Q_\iota := \mathbb{R}$ für $\iota\in I\setminus J$. $\Longrightarrow$ $\sigma(E,F) = \tau(E,F)$.
Sei $\iota : \mathbb{N}\longrightarrow I$ injektiv. Wir setzen $e^n_\kappa := 1$ für $\kappa = \iota(n)$, $e^n_\kappa := 0$ für $\kappa\in I\setminus\iota(\mathbb{N})$. Dann ist $(e^n; n\in\mathbb{N})$ eine $\sigma(F,E)$-Nullfolge, also ist $A := \{e^n; n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ $\sigma(F,E)$-kompakt. Sei $q_A(x) := \sup\{|\langle x,y\rangle|;\ y\in A\}$ $(x\in E)$ die zu A gebildete $\delta(E,F)$-stetige Halbnorm. Dann gilt $q_A(e^n) = 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Es folgt $\delta(E,F) \supsetneqq \sigma(E,F) = \tau(E,F)$.

<u>Zu (c):</u> Mit $\bigvee\{\dots\}$ bezeichnen wir das Supremum der Menge $\{\dots\}$ von Topologien (vgl. HORVÁTH[65, p. 73]).
Sei $\mathcal{T} := \bigvee\{\mathcal{R}\subset \mathrm{Pot}(E);\ \mathcal{R}$ eine lokalkonvexe Topologie auf E mit $\mathcal{R}\cap L = \tau(E,F)\cap L$ für alle linearen Teilräume L von E mit $\dim(L) = \mathrm{card}(\mathbb{N})\}$ und $x^*\in(E,\mathcal{T})' =: G\subset E^* = \mathbb{R}^I$. Wir nehmen an, daß $\mathrm{carr}(x^*)$ nicht endlich ist. Dann gibt es eine injektive Abbildung $\iota : \mathbb{N}\longrightarrow I$ mit $x^*_{\iota(n)} \neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Sei $Q_\kappa := \{0\}$ für $\kappa\notin\iota(\mathbb{N})$, $Q_\kappa := \mathbb{R}$ für $\kappa\in\iota(\mathbb{N})$, $H := \prod_{\kappa\in I} Q_\kappa$, $L := H\cap\mathbb{R}^{(I)}$. $\Longrightarrow$ L ist linearer Teilraum von E und es gilt $\dim(L) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$. Nach ROELCKE[108, p. 92, (19.4)] gilt $\mathcal{T}\cap L = \tau(E,F)\cap L$; mit $\tau(E,F) = \sigma(E,F)$ erhält man also $\mathcal{T}\cap L = \sigma(L,F)$.
$x^*\in(E,\mathcal{T})' \Longrightarrow z^* := x^*|L\in(L,\mathcal{T}\cap L)' \Longrightarrow z^*\in F$. Dies ist ein Widerspruch zu $z^*_{\iota(n)} \neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Man erhält daher $x^*\in F$, d.h. $G = F$. Die Topologien $\sigma(L,F)$ sind für $\dim(L)\leq\mathrm{card}(\mathbb{N})$ metrisierbar, denn es ist $\sigma(L,F) = \sigma(L,\mathbb{R}^{(J)})$ mit einer abzählbaren Teilmenge J von I. Insbesondere sind also die Topologien $\sigma(L,F)$ für $\dim(L)\leq\mathrm{card}(\mathbb{N})$ bornologisch. Daher ist auch $\mathcal{T}$ bornologisch und man erhält $\mathcal{T} = \tau(E,G) = \tau(E,F) = \sigma(E,F) = \beta^*(E,F)$.
Vgl. hierzu HORVÁTH[65, p. 222, Prop. 3 u. 4], KÖTHE[80, p. 382 (1)] und HORVÁTH[65, p. 220, ex. 5c].)

Zu (d): Nach DUDLEY[45, p. 494, Th. 6.3] trägt jeder bornologische lokalkonvexe Raum seine (in der Kategorie der lokalkonvexen Räume) assoziierte Folgen-Topologie. (d) folgt deshalb aus (c).

Zu (e): Sei wieder $\iota : \mathbb{N} \longrightarrow I$ injektiv und e^n $(n \in \mathbb{N})$ wie oben erklärt. Wir setzen $x^1 := e^1$, $x^{n+1} := e^{n+1} - e^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann erfüllt $(x^n; n \in \mathbb{N})$ die CAUCHY-Bedingung und ist in $(E, \sigma(E,F))$ zum Wert 0 summierbar. $(x^n; n \in \mathbb{N})$ ist jedoch nicht TF-summierbar. Daraus ersieht man, daß $(E, \sigma(E,F))$ nicht Σ-vollständig ist.

$(x^n; n \in \mathbb{N})$ ist auch nicht $\delta(E,F)$-summierbar, wie man mit der zu $B := \{n \cdot e^n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ gebildeten $\delta(E,F)$-stetigen Halbnorm q_B erkennt. Es ist $q_B(x^n) = \sup\{|\langle x^n, m \cdot e^m\rangle|;\ m \in \mathbb{N}\} = n$ $(n \in \mathbb{N})$.

(4.11) Beispiel. Sei K ein kompakter HAUSDORFF-Raum, $E := C(K)$. $\delta : K \longrightarrow (C(K), \|\cdot\|_\infty)'$ sei die DIRAC-Abbildung, $\delta(t)(f) := f(t)$ $(t \in K,\ f \in E)$. Setzt man $F := [\delta(K)] \subset (C(K), \|\cdot\|_\infty)'$, so stimmt $\sigma(E,F)$ gerade mit der Topologie $\mathcal{T}_p$ der punktweisen Konvergenz auf K überein. Da die DIRAC-Abbildung $\delta : K \longrightarrow (\delta(K), \sigma(F,E) \cap \delta(K))$ topologisch ist, folgt, daß $\delta(E,F)$ feiner als die $\|\cdot\|_\infty$-Topologie ist. Mit Korollar (4.5a) erhält man daher: Auf $C(K)$ besitzen $\mathcal{T}_p$ und die $\|\cdot\|_\infty$-Topologie die gleichen TF-summierbaren Familien.

Bei THOMAS[122, p. 183] wird diese Aussage als Anwendungsbeispiel für einen anderen Satz vom ORLICZ-PETTIS-Typ verwendet.

Die beiden folgenden Anwendungen von (4.11) wurden durch Konstruktionen von BATT[13] und KALTON[73] angeregt.

(4.12) Beispiel. Sei $(X, \mathcal{F})$ ein separierter topologischer Raum, $\mathfrak{M} \subset \mathrm{Pot}(X)$, $\bigcup \mathfrak{M} = X$. $(F, \mathcal{T})$ sei ein separierter lokalkonvexer Raum. Zu diesen Daten definieren wir den Raum

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(X,F) := \{T : X \longrightarrow F;\ T|M : (M, \mathcal{F} \cap M) \longrightarrow (F, \mathcal{T}) \text{ stetig, } T(M) \text{ beschränkt für alle } M \in \mathfrak{M}\}.$$

Zu $M \in \mathfrak{M}$, $V \in \mathcal{U}_0(F, \mathcal{T})$ und $T \in \mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(X,F)$ definieren wir

$T_{M,V} : M \times V^0 \longrightarrow \mathbb{K}$, $T_{M,V}(x,y') := \langle y', T(x)\rangle$ $(x \in M,\ y' \in V^0)$.

Beh.: $T_{M,V} : (M, \mathcal{F} \cap M) \times (V^0, \sigma(F',F) \cap V^0) \longrightarrow \mathbb{K}$ ist stetig und beschränkt, d.h. $T_{M,V} \in C_b(M \times V^0)$.

Bew.: Sei $x_\iota \longrightarrow x$ in $\mathcal{F} \cap M$. Dann folgt $T(x_\iota) \longrightarrow T(x)$ in $\mathcal{T}$, also $T(x_\iota) \longrightarrow T(x)$ gleichmäßig auf V^0. Sei $y'_\iota \longrightarrow y'$ in $\sigma(F',F) \cap V^0$. Aus der Darstellung $T_{M,V}(x_\iota, y'_\iota) - T_{M,V}(x,y') =$

$$\langle y'_\iota, T(x_\iota)\rangle - \langle y', T(x)\rangle = \langle y'_\iota, T(x_\iota) - T(x)\rangle - \langle y' - y'_\iota, T(x)\rangle$$

liest man nun direkt $T_{M,V}(x_\iota, y'_\iota) \longrightarrow T_{M,V}(x,y')$ ab. Also ist $T_{M,V}$ stetig. V^o ist als gleichgradig stetige Teilmenge von F' auch $\beta(F',F)$-beschränkt (KÖTHE[80, p. 254 (3)]). Nach Voraussetzung ist $T(M)$ beschränkt in $(F,\mathcal{T})$. Man erhält also $\sup\{|\langle y',T(x)\rangle| ;\ y'\in V^o,\ x\in M\} < \infty$. ./.

Die Abbildung $\Lambda : \mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(X,F) \longrightarrow \prod_{M,V} C_b(M\times V^o)$, $T \longmapsto (T_{M,V};\ M\in\mathfrak{M}$, $V\in\mathfrak{U}_o(F,\mathcal{T})$ mit $V = \overline{\Gamma(V)})$ ist daher erklärt. Mit $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ bezeichnen wir die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen aus $\mathfrak{M}$.

<u>Beh.:</u> $\Lambda : (\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(X,F), \mathcal{T}(\mathfrak{M})) \longrightarrow \prod_{M,V} (C_b(M\times V^o), \|\cdot\|_\infty)$ ist topologisch auf das Bild.

<u>Bew.:</u> Eine Nullumgebungs-Subbasis für $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ ist gegeben durch die Mengen der Form $W(M,V) := \{T\in\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(X,F);\ T(M)\subset V\}$ $(M\in\mathfrak{M},\ V\in\mathfrak{U}_o(F)$, $V = \overline{\Gamma(V)})$. Eine Nullumgebungs-Subbasis in $\prod_{M,V} (C_b(M\times V^o), \|\cdot\|_\infty)$ erhält man mit $Q_{M,V} := K[0,\varepsilon] \subset C_b(N\times U^o)$ für $(M,V) = (N,U)$, $Q_{M,V} := C_b(M\times V^o)$ für $(M,V) \neq (N,U)$, in der Form $\prod_{M,V} Q_{M,V}$ $(\varepsilon > 0,\ N\in\mathfrak{M}$, $U\in\mathfrak{U}_o(F)$, $U = \overline{\Gamma(U)})$. Nun gilt: $\Lambda(T)\in\prod_{M,V} Q_{M,V} \Longleftrightarrow \|T_{N,U}\|_\infty \leq \varepsilon \Longleftrightarrow$ $|\langle y',T(x)\rangle| \leq \varepsilon \quad \forall\ y'\in U^o,\ x\in N \Longleftrightarrow |\langle \frac{1}{\varepsilon} y', T(x)\rangle| \leq 1$ für alle $(\frac{1}{\varepsilon} y') \in \frac{1}{\varepsilon} U^o$, $x\in N \Longleftrightarrow T(x)\in(\varepsilon U)^{oo} = \varepsilon U$ für alle $x\in N \Longleftrightarrow$ $T\in W(N,\varepsilon U)$. ./.

Mit $\mathcal{T}_p$ sei die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $M\times V^o$ bezeichnet. Mit $\mathfrak{T}$ bezeichnen wir die Initialtopologie auf $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(X,F)$ bezüglich der linearen Abbildungen $[x,y'] : \mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(X,F) \longrightarrow \mathbb{K}$, $[x,y'](T) := \langle y',T(x)\rangle$ $(x\in X,\ y'\in F')$. Wie oben zeigt man, daß die Abbildung $\Lambda : (\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(X,F), \mathfrak{T}) \longrightarrow \prod_{M,V} (C_b(M\times V^o), \mathcal{T}_p)$ topologisch auf das Bild ist.

Nun bestehe $\mathfrak{M}$ aus $\mathcal{F}$-kompakten Teilmengen von X. Dann ist $C_b(M\times V^o) = C(M\times V^o)$ für alle $M\in\mathfrak{M}$, $V = \overline{\Gamma(V)} \in \mathfrak{U}_o(F,\mathcal{T})$.

$(T_\iota;\ \iota\in I)$ sei eine $\mathfrak{T}$-TF-summierbare Familie in $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(X,F)$. Dann ist $(\Lambda(T_\iota);\ \iota\in I)$ TF-summierbar in $\prod_{M,V} (C(M\times V^o), \mathcal{T}_p)$, also auch in $\prod_{M,V} (C(M\times V^o), \|\cdot\|_\infty)$ nach (4.11). Daher ist $(T_\iota;\ \iota\in I)$ auch TF-summierbar in $(\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(X,F), \mathcal{T}(\mathfrak{M}))$.

Setzt man hier für $(X,\mathcal{F})$ speziell einen topologischen linearen Raum $(E,\mathcal{R})$ ein und nimmt für $\mathfrak{M}$ alle $\mathcal{R}$-kompakten Teilmengen von E, so erhält man, daß auf $L(E_{\mathcal{R}},F_{\mathcal{T}}) := \{T:(E,\mathcal{R})\longrightarrow(F,\mathcal{T});$ T stetig und linear$\} \subset \mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(E,F)$ die schwache Operator-Topologie $\mathcal{F} \cap L(E_{\mathcal{R}},F_{\mathcal{T}})$ (vgl. DUNFORD, SCHWARTZ[50, p. 476]) und die Topologie $\mathcal{T}(\mathfrak{M}) \cap L(E_{\mathcal{R}},F_{\mathcal{T}})$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von $(E,\mathcal{R})$ die gleichen TF-summierbaren Familien besitzen.

Spezialisiert man $F := \mathbb{K}$ und setzt $(E',\sigma(E',E))$ an die Stelle von $(E,\mathcal{R})$, so erhält man, daß auf $L(E'_{\sigma},\mathbb{K}) = E$ die Topologien $\sigma(E,E')$ und $\delta(E,E')$ die gleichen TF-summierbaren Familien besitzen.

<u>(4.13) Beispiel.</u> Seien $(E,\mathcal{R})$ und $(F,\mathcal{T})$ separierte lokalkonvexe Räume. Wir setzen

$$\mathcal{K}(E,F) := \{T:\ (E,\sigma(E,E'))\longrightarrow(F,\sigma(F,F'));\ T \text{ linear und stetig},$$
$$T^t|V^o:(V^o,\sigma(F',F)\cap V^o)\longrightarrow(E',\beta(E',E)) \text{ ist stetig}$$
$$\text{für alle } V\in\mathcal{U}_o(F,\mathcal{T})\}\ .$$

Für stetige lineare Abbildungen $T:\ (E,\sigma(E,E'))\longrightarrow(F,\sigma(F,F'))$ sind nach GROTHENDIECK[59, p. 121, Thm. 12, (1)$\Longleftrightarrow$(2')] folgende Aussagen äquivalent:

(a) $T^t|V^o:(V^o,\sigma(F',F)\cap V^o)\longrightarrow(E',\beta(E',E))$ ist stetig für alle $V\in\mathcal{U}_o(F,\mathcal{T})$.

(b) Für jede $\sigma(E,E')$-beschränkte Teilmenge B von E ist $T(B)$ $\mathcal{T}$-präkompakt.

$\mathcal{K}(E,F)$ besteht daher genau aus denjenigen Abbildungen aus $L(E_{\sigma},F_{\sigma})$, die alle $\sigma(E,E')$-beschränkten Teilmengen von E in $\mathcal{T}$-präkompakte Teilmengen von F abbilden.

Sei $\mathcal{B} := \{B\subset E;\ B \text{ ist } \sigma(E,E')\text{-beschränkt}\}$. Zu $V\in\mathcal{U}_o(F,\mathcal{T})$, $B\in\mathcal{B}$ und $T\in\mathcal{K}(E,F)$ definieren wir $T^t_{V,B}:\ V^o\times B^{oo}\longrightarrow\mathbb{K}$,

$(y',x'')\longmapsto\langle x'',T^t(y')\rangle$ (Die zweite Polare ist hier in E'' gebildet.)

<u>Beh.:</u> $T^t_{V,B}:\ (V^o,\sigma(F',F)\cap V^o)\times(B^{oo},\sigma(E'',E')\cap B^{oo})\longrightarrow\mathbb{K}$ ist stetig für alle $V\in\mathcal{U}_o(F,\mathcal{T})$, $B\in\mathcal{B}$.

<u>Bew.:</u> Sei $y'_\iota\longrightarrow y'$ in $\sigma(F',F)\cap V^o$. Dann folgt $T^t(y'_\iota)\longrightarrow T^t(y')$ bezüglich $\beta(E',E)$, also $T^t(y'_\iota)\longrightarrow T^t(y')$ gleichmäßig auf allen $\beta(E',E)$-gleichgradig stetigen Teilmengen von E'', insbesondere auf B^{oo}. Sei $x''_\iota\longrightarrow x''$ bezüglich $\sigma(E'',E')\cap B^{oo}$. Aus der Darstellung

$T^t_{V,B}(y'_\iota, x''_\iota) - T^t_{V,B}(y', x'') = \langle x''_\iota, T^t(y'_\iota)\rangle - \langle x'', T^t(y')\rangle =$
$= \langle x''_\iota, T^t(y'_\iota) - T^t(y')\rangle - \langle x'' - x''_\iota, T^t(y')\rangle$ liest man nun direkt die Stetigkeit von $T^t_{V,B}$ ab. ./.

Die Abbildung $\Omega : \mathcal{K}(E,F) \longrightarrow \prod_{V,B} C(V^o \times B^{oo})$,

$T \longmapsto (T^t_{V,B};\ V \in \mathcal{U}_o(F,\mathcal{T}),\ V = \overline{\Gamma(V)},\ B \in \mathcal{B})$ ist daher erklärt.

Wir versehen $\mathcal{K}(E,F)$ mit der Topologie $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen aus $\mathcal{B}$.

<u>Beh.:</u> $\Omega : (\mathcal{K}(E,F), \mathcal{F}(\mathcal{B})) \longrightarrow \prod_{V,B} (C(V^o \times B^{oo}), \|\cdot\|_\infty)$ ist topologisch auf das Bild.

<u>Bew.:</u> Eine Nullumgebungs-Subbasis für $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ ist gegeben durch die Mengen der Form $W(B,V) := \{T \in \mathcal{K}(E,F);\ T(B) \subset V\}$ $(B \in \mathcal{B},\ V \in \mathcal{U}_o(F,\mathcal{T}),\ V = \overline{\Gamma(V)})$.
Eine Nullumgebungs-Subbasis in $\prod_{V,B} (C(V^o \times B^{oo}), \|\cdot\|_\infty)$ erhält man mit $Q_{V,B} := K[0,\varepsilon] \subset C(U^o \times D^{oo})$ für $(V,B) = (U,D)$, $Q_{V,B} := C(V^o \times B^{oo})$ für $(V,B) \neq (U,D)$, in der Form $\prod_{V,B} Q_{V,B}$ $(D \in \mathcal{B},\ U \in \mathcal{U}_o(F,\mathcal{T}),$
$U = \overline{\Gamma(U)},\ \varepsilon > 0)$.
Nun gilt $\Omega(T) \in \prod_{V,B} Q_{V,B} \iff \| T^t_{U,D} \|_\infty \leq \varepsilon \iff |\langle x'', T^t(y')\rangle| \leq \varepsilon$ für alle $x'' \in D^{oo}$, $y' \in U^o$. $\iff |\langle x, T^t(y')\rangle| \leq \varepsilon$ für alle $x \in D$, $y' \in U^o$. $\iff |\langle x, T^t(\frac{1}{\varepsilon} y')\rangle| \leq 1$ für alle $x \in D$, $\frac{1}{\varepsilon} y' \in \frac{1}{\varepsilon} U^o$.

Man erhält daher weiter:

$$\begin{aligned}
\Omega(T) \in \prod_{V,B} Q_{V,B} &\iff |\langle x, T^t(z')\rangle| \leq 1 \text{ für alle } x \in D,\ z' \in (\varepsilon U)^o. \\
&\iff |\langle T(x), z'\rangle| \leq 1 \text{ für alle } x \in D,\ z' \in (\varepsilon U)^o. \\
&\iff T(x) \in (\varepsilon U)^{oo} = \varepsilon U \text{ für alle } x \in D. \\
&\iff T \in W(D, \varepsilon U). \quad ./.
\end{aligned}$$

Mit $\mathcal{F}'$ bezeichnen wir die Initialtopologie auf $\mathcal{K}(E,F)$ bezüglich der linearen Abbildungen $[y', x''] : \mathcal{K}(E,F) \longrightarrow \mathbb{K}$, $[y', x''](T) := \langle x'', T^t(y')\rangle$ $(x'' \in E'',\ y' \in F')$; $\mathcal{F}_p$ bezeichne die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $V^o \times B^{oo}$. Man sieht nun leicht, daß die Abbildung $\Omega : (\mathcal{K}(E,F), \mathcal{F}') \longrightarrow \prod_{V,B} (C(V^o \times B^{oo}), \mathcal{F}_p)$ topologisch auf das Bild ist. Wie im vorigen Beispiel erhält man daher:

Auf $\mathcal{K}(E,F)$ haben die dual-schwache Operator-Topologie $\mathcal{F}'$ und die Topologie $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen

$\sigma(E,E')$-beschränkten Teilmengen von E die gleichen TF-summierbaren Familien.

Mit Satz (6.1) können die Ergebnisse von (4.12) und (4.13) auch als Aussagen über die σ-Additivität Operator-wertiger Mengenfunktionen interpretiert werden (vgl. auch KALTON[73, p. 274, Thm. 5]).

§ 5 Polare Gruppentopologien vom abzählbaren Typ und ORLICZ-PETTIS-Sätze.

Zur Formulierung der Ergebnisse dieses Abschnittes benötigen wir einige Vorbereitungen.

Ist $(E,\mathcal{R})$ eine halbmetrisierbare kommutative topologische Gruppe, so gibt es eine translationsinvariante Halbmetrik d auf E, die die Topologie $\mathcal{R}$ liefert (vgl. etwa SEGAL, KUNZE[117, p. 186]). Ist d eine translationsinvariante Halbmetrik auf E, so setzen wir $q(x):= d(x,0)$ $(x\in E)$, und nennen q (wie schon in §3) eine Quasinorm.

Für kommutative topologische Gruppen zeigt man wie im Fall der topologischen linearen Räume: Jede kommutative topologische Gruppe ist Untergruppe eines geeigneten Produktes von halbmetrisierbaren kommutativen topologischen Gruppen (siehe auch BOURBAKI[22, p. 77, ex. 1]).

<u>(5.1) Satz.</u> Für eine kommutative topologische Gruppe $(E,\mathcal{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $(E,\mathcal{R})$ ist Untergruppe eines Produktes $\prod_{\iota\in I}(E_\iota,d_\iota)$ von separablen halbmetrisierbaren kommutativen topologischen Gruppen (E_ι,d_ι) $(\iota\in I)$.

(b) Für jede stetige Quasinorm $q:(E,\mathcal{R})\longrightarrow\mathbb{R}$ ist (E,q) separabel.

(c) Zu jeder Nullumgebung $U\in\mathcal{U}_0(E,\mathcal{R})$ gibt es eine abzählbare Teilmenge A_U von E mit $E\subset A_U+U$.

(d) Ist $U\in\mathcal{U}_0(E,\mathcal{R})$ und hat $A\subset E$ die Eigenschaft $(a+U)\cap(a'+U)=\emptyset$ für alle $a,a'\in A$ mit $a\neq a'$, so gilt $\mathrm{card}(A)\leq\mathrm{card}(\mathbb{N})$.

<u>Beweis:</u>

<u>(b) $\Longrightarrow$ (a):</u> Sei Q die Menge aller stetigen Quasinormen $q:(E,\mathcal{R})\longrightarrow\mathbb{R}$. Dann ist $(E,\mathcal{R})$ topologisch isomorph zur Diagonalen $\{(x_q;q\in Q)\in\prod_{q\in Q}E;\ \exists\, x\in E \text{ mit } x=x_q \text{ für alle } q\in Q\}$ in $\prod_{q\in Q}(E,q)$.

<u>(a) $\Longrightarrow$ (c):</u> Sei $U\in\mathcal{U}_0(E,\mathcal{R})$ und $(E,\mathcal{R})\subset\prod_{\iota\in I}(E_\iota,d_\iota)$, wobei (E_ι,d_ι) separabel ist $(\iota\in I)$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge J von I und ein $\varepsilon>0$, so daß mit $H_\iota:=\{x\in E_\iota;\ q_\iota(x)<\varepsilon\}$ $(\iota\in J)$, $H_\iota:=E_\iota$ $(\iota\in I\setminus J)$, die Inklusion $(\prod_{\iota\in I}H_\iota)\cap E\subset U$ gilt. Wir setzen $d'_\iota:=d_\iota$ $(\iota\in J)$, $d'_\iota:=0$ $(\iota\in I\setminus J)$ und bilden $\prod_{\iota\in I}(E_\iota,d'_\iota)$. Die durch dieses Produkt auf E induzierte Relativtopologie werde mit $\mathcal{R}'$ bezeichnet. Da $\prod_{\iota\in I}(E_\iota,d'_\iota)$ ein sepa-

rabler halbmetrisierbarer Raum ist, ist $(E,\mathcal{R}')$ separabel. Es gibt also eine abzählbare $\mathcal{R}'$-dichte Teilmenge A_U von E. Nach Konstruktion ist $U \in \mathcal{U}_o(E,\mathcal{R}')$ und damit folgt $A_U + U = E$.

<u>(c) $\Longrightarrow$ (b):</u> Sei $q:(E,\mathcal{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n eine abzählbare Teilmenge von E mit $A_n + V_n = E$, wobei $V_n := \{x \in E;\ q(x) < n^{-1}\}$ gesetzt ist. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n =: A$ eine abzählbare dichte Teilmenge von (E,q).

<u>(c) $\Longrightarrow$ (d):</u> Sei $U \in \mathcal{U}_o(E,\mathcal{R})$ und $A \subset E$ habe die Eigenschaft $(a+U) \cap (a'+U) = \emptyset$ für alle $a,a' \in A$, $a \neq a'$. O.E. kann man U symmetrisch (d.h. $U = -U$) annehmen. Nach (c) gibt es $B \subset E$, B abzählbar, so daß $E \subset B + U$ gilt. Zu jedem $a \in A$ wähle man ein $b \in B$ mit $a \in b + U$. Dadurch ist eine Abbildung $\varphi : A \longrightarrow B$ gegeben. Wir zeigen, daß φ injektiv ist. Seien $a_1, a_2 \in A$, $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = b$. Dann gilt $a_1 \in b + U$, $a_2 \in b + U$ und daraus folgt $b \in (a_1 - U) \cap (a_2 - U) = (a_1 + U) \cap (a_2 + U)$. Also gilt $a_1 = a_2$. Man erhält daher $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

<u>(d) $\Longrightarrow$ (o):</u> Sei $U \in \mathcal{U}_o(E,\mathcal{R})$ gegeben. Zu U existiert $V \in \mathcal{U}_o(E,\mathcal{R})$ mit $V - V \subset U$. Zu V betrachten wir das Mengensystem $\mathfrak{A} := \{A \subset E;\ a,a' \in A,\ a \neq a' \Longrightarrow (a+V) \cap (a'+V) = \emptyset\}$. Die Mengeninklusion induziert auf $\mathfrak{A}$ eine Halbordnung bezüglich derer $\mathfrak{A}$ induktiv geordnet ist. Es gibt also ein maximales Element A_o in $\mathfrak{A}$. Nach Voraussetzung (d) ist A_o abzählbar. Wegen der Maximalität von A_o gilt $(x+V) \cap (A_o + V) \neq \emptyset$ für jedes $x \in E$, d.h. zu jedem $x \in E$ gibt es $v,v' \in V$, $a \in A_o$ mit $x + v = a + v' \Longrightarrow x = a + v' - v \in a + V - V \subset A_o + U. \Longrightarrow E \subset A_o + U$. ./.

<u>(5.2) Bemerkung.</u> Satz (5.1) gilt sinngemäß auch für uniforme Räume, topologische lineare Räume und für lokalkonvexe Räume.

<u>(5.3) Definition.</u> Sei $(E,\mathcal{R})$ eine kommutative topologische Gruppe. $\mathcal{R}$ heißt "vom abzählbaren Typ", wenn (5.1c) erfüllt ist.

<u>(5.4) Bemerkungen.</u>

(a) Jede separable Gruppentopologie ist vom abzählbaren Typ. Ist $(E,\mathcal{R})$ halbmetrisierbar, so ist $\mathcal{R}$ genau dann vom abzählbaren Typ, wenn $\mathcal{R}$ separabel ist. Im Gegensatz zu "separabel" besitzt die Eigenschaft "vom abzählbaren Typ" eine bemerkenswerte Stabilität: Produkte und Teilräume von Räumen vom abzählbaren Typ sind wieder vom abzählbaren Typ. Da die gröbste Topologie vom abzählbaren Typ ist, vererbt sich diese Eigenschaft somit auf beliebige Initialtopologien. Insbesondere ist die obere Grenze einer beliebigen Familie von Gruppentopologien vom abzählbaren Typ wieder von dieser

Art.
(b) Für lokalkonvexe Räume findet man obige Eigenschaft unter der Bezeichnung "Halbnorm-separabel" bereits bei GARNIR, De WILDE, SCHMETS[53, p. 63 ff.] . Wir werden deshalb bei lokalkonvexen Räumen die Bezeichnung "Halbnorm-separabel" verwenden. Satz (5.1) zeigt, daß $\sigma(E,F)$ für jedes duale Paar $\langle E,F\rangle$ Halbnorm-separabel ist.

Speziell im Zusammenhang mit topologischen Gruppen wurde dieser Begriff (unter der Bezeichnung "transseparabel") zuerst von DREWNOWSKI[42, p. 233] durch (5.1c) definiert. In dieser Arbeit ist auch die Charakterisierung (5.1a) erwähnt.

Uniforme Räume vom abzählbaren Typ wurden von LAVIGNE[89] definiert. In dieser Arbeit findet man auch die Eigenschaft (5.1d).

Der aus der Theorie der lokalkonvexen Räume wohlbekannte Begriff einer "polaren Topologie" zu einem dualen Paar (vgl. ROBERTSON, ROBERTSON[106, p. 55]) wird durch folgende Definition auf topologische Gruppen übertragen (siehe auch KALTON[74, p. 152]).

<u>(5.5) Definition.</u> Sei $(E,\mathcal{R})$ eine kommutative topologische Gruppe. Eine Gruppentopologie $\mathcal{T}$ auf E heißt $\mathcal{R}$-polar, wenn $\mathcal{T}$ eine Nullumgebungsbasis aus $\mathcal{R}$-abgeschlossenen Mengen besitzt.

<u>(5.6) Bemerkungen</u>
(a) Die Einführung des Begriffes der $\mathcal{R}$-polaren Topologie ist durch Satz (3.4a) motiviert.
(b) Ist $\langle E,F\rangle$ ein duales Paar und $\mathcal{T}$ eine lokalkonvexe Topologie auf E, so ist $\mathcal{T}$ genau dann $\langle E,F\rangle$-polar, wenn $\mathcal{T}$ $\sigma(E,F)$-polar im Sinne von (5.5) ist.
(c) Ist $(\mathcal{T}_\iota;\iota\in I)$ eine Familie von Gruppentopologien auf E, so ist durch $\mathcal{B}:=\bigcup(\mathcal{U}_0(\mathcal{T}_\iota);\iota\in I)$ eine Nullumgebungs-Subbasis für die (in der Kategorie der topologischen Gruppen gebildete) obere Grenze $\mathcal{T}:=\bigvee\{\mathcal{T}_\iota;\iota\in I\}$ gegeben. Ist $\mathcal{T}_\iota$ $\mathcal{R}$-polar für alle $\iota\in I$, so ist daher auch $\mathcal{T}$ eine $\mathcal{R}$-polare Gruppentopologie auf E.

Für Sätze vom ORLICZ-PETTIS-Typ ist speziell die feinste $\mathcal{R}$-polare Gruppentopologie zu $(E,\mathcal{R})$ interessant, die noch vom abzählbaren Typ ist.

<u>(5.7) Satz.</u>
(a) Sei $(E,\mathcal{R})$ eine kommutative topologische Gruppe. Unter allen $\mathcal{R}$-polaren Gruppentopologien $\mathcal{T}$ auf E, die vom abzählbaren Typ sind, gibt es eine feinste, die wir mit $\eta(\mathcal{R})$ bezeichnen.

Ist $T:(E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, so ist auch $T:(E,\eta(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,\eta(\mathcal{F}))$ stetig.
(b) Die Aussage (a) ist sinngemäß auch für topologische lineare Räume und für lokalkonvexe Räume gültig.
(c) Für jedes duale Paar $\langle E,F\rangle$ ist $\eta(E,F) := \eta(\sigma(E,F))$ die feinste $\langle E,F\rangle$-polare Halbnorm-separable Topologie auf E.
Ist $\mathcal{R}$ eine lokalkonvexe Topologie auf E mit $\tau(E,F) \supset \mathcal{R} \supset \sigma(E,F)$, so gilt $\eta(\mathcal{R}) = \eta(E,F)$.

<u>Beweis:</u>
<u>Zu (a):</u> Wir setzen $\eta(\mathcal{R}) := \bigvee \{\mathcal{T};\ \mathcal{T}$ eine $\mathcal{R}$-polare Gruppentopologie vom abzählbaren Typ auf $E\}$. (Die gröbste Topologie auf E ist sowohl vom abzählbaren Typ, als auch $\mathcal{R}$-polar. Das Supremum wird also nicht über eine leere Menge gebildet.) Nach (5.6c) und (5.4a) ist $\eta(\mathcal{R})$ sowohl $\mathcal{R}$-polar, als auch vom abzählbaren Typ. Sei jetzt $T:(E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus und $\mathcal{S}$ eine beliebige $\mathcal{F}$-polare Gruppentopologie vom abzählbaren Typ auf F. Dann ist die Initialtopologie $T^{-1}(\mathcal{S})$ vom abzählbaren Typ und auch $\mathcal{R}$-polar. Es gilt daher $T^{-1}(\mathcal{S}) \subset \eta(\mathcal{R})$, d.h. $T:(E,\eta(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,\mathcal{S})$ ist stetig. Also ist auch $T:(E,\eta(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,\eta(\mathcal{F}))$ stetig.
<u>Zu (b):</u> Man kann unmittelbar den Beweis aus (a) übernehmen.
<u>Zu (c):</u> Nach (5.6b) ist eine lokalkonvexe Topologie $\mathcal{R}$ auf E genau dann $\langle E,F\rangle$-polar, wenn sie $\sigma(E,F)$-polar ist. Da $\sigma(E,F)$ selbst Halbnorm-separabel ist, folgt aus der in Beweisteil (a) angegebenen Darstellung von $\eta(\sigma(E,F))$ der erste Teil der Behauptung. Für den Beweis des zweiten Teiles der Behauptung erhält man zunächst aus (5.7a) die Inklusion $\eta(\sigma(E,F)) \subset \eta(\mathcal{R})$. Ist $\mathcal{S}$ irgendeine $\mathcal{R}$-polare Halbnorm-separable lokalkonvexe Topologie auf E, so besitzt $\mathcal{S}$ eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen $\mathcal{R}$-abgeschlossenen Mengen. Diese Mengen sind jedoch wegen $\tau(E,F) \supset \mathcal{R} \supset \sigma(E,F)$ auch $\sigma(E,F)$-abgeschlossen (KÖTHE[80, p. 246 (6)]). $\mathcal{S}$ ist also auch $\sigma(E,F)$-polar und damit folgt $\eta(\mathcal{R}) \subseteq \eta(\sigma(E,F))$.

Im folgenden bezeichnet $\eta(\mathcal{R})$ stets die zu $\mathcal{R}$ (in der jeweiligen Kategorie) gemäß Satz (5.7) gebildete feinste $\mathcal{R}$-polare Topologie vom abzählbaren Typ. Aus dem Zusammenhang wird stets ersichtlich sein, in welcher Kategorie $\eta(\mathcal{R})$ gebildet wird; wir unterscheiden das nicht in der Bezeichnung.

Für spätere Anwendungen geben wir im folgenden Satz eine Beschreibung der $\eta(E,F)$-gleichgradig stetigen Mengen an.

(5.8) Satz. Sei $\langle E,F\rangle$ ein duales Paar und $\eta(E,F)$ die feinste $\langle E,F\rangle$-polare Halbnorm-separable Topologie auf E.
(a) Das Mengensystem $\mathfrak{M} := \{M \subset F;\ M$ beschränkt, $\sigma(F,E) \cap \overline{\Gamma(M)}$ ist metrisierbar$\}$ ist gesättigt und $\eta(E,F)$ stimmt mit der Topologie $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen aus $\mathfrak{M}$ überein.
(b) Das Mengensystem $\mathfrak{N} := \{N \subset F;\ N$ beschränkt, die durch $\sigma(F,E)$ auf N induzierte Uniformität ist metrisierbar$\}$ ist gesättigt und $\eta(E,F)$ stimmt mit der Topologie $\mathcal{T}(\mathfrak{N})$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen aus $\mathfrak{N}$ überein.
(c) $\sigma(E,F) \subset \eta(E,F) \subset \beta(E,F)$. $\eta(E,F)$ stimmt genau dann mit $\beta(E,F)$ überein, wenn $\beta(E,F)$ Halbnorm-separabel ist.

Beweis:
KALTON[71, p. 401, (1.2), p. 402, (1.3), (1.4)] bewies folgende Aussagen:
(1) Das stetige separierte Bild eines kompakten metrischen Raumes ist ein kompakter metrischer Raum.
(2) Sei B eine absolutkonvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes $(E,\mathcal{R})$. Dann ist $\mathcal{R} \cap B$ genau dann metrisierbar, wenn die durch $\mathcal{R}$ auf B induzierte Relativ-Uniformität metrisierbar ist.
(3) Sei $(G,\mathcal{F})$ ein lokalkonvexer Raum und D eine $\mathcal{F}$-präkompakte Teilmenge von G, für die die relative $\mathcal{F}$-Uniformität metrisierbar ist. Dann ist auch die Topologie $\mathcal{F} \cap \overline{\Gamma(D)}$ metrisierbar.

Für $\sigma(F,E)$ stimmen die beschränkten Mengen mit den präkompakten Mengen überein. Mit (3) folgt daher $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ und mit (2) erhält man $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.
Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{M}$ gesättigt (im Sinne von KÖTHE[80, p.257]) ist. Seien dazu $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$, o.E. $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$. Mit D_i $(i=1,2)$ werde der Abschluß von $\Gamma(M_i)$ $(i=1,2)$ in der Vervollständigung $\tilde{F}$ von $(F,\sigma(F,E))$ bezeichnet. Dann stimmt $(D_i, \sigma(\tilde{F},E) \cap D_i)$ mit der Vervollständigung des präkompakten metrischen Raumes $(\Gamma(M_i), \sigma(F,E) \cap \Gamma(M_i))$ überein $(i=1,2)$. $(D_1 + D_2, \sigma(\tilde{F},E) \cap (D_1 + D_2))$ ist als stetiges separiertes Bild des kompakten metrischen Raumes $(D_1, \sigma(\tilde{F},E) \cap D_1) \times (D_2, \sigma(\tilde{F},E) \cap D_2)$ nach (1) selbst ein kompakter metrischer Raum. Weiterhin ist $D_1 + D_2$ absolutkonvex. Insbesondere ist also $\sigma(F,E) \cap \overline{\Gamma(M_1 + M_2)}$ metrisierbar, d.h. $\overline{\Gamma(M_1 + M_2)} \in \mathfrak{M}$.
Mit den allgemein gültigen Relationen $A \cup B \subset \Gamma(A) + \Gamma(B)$ $(A, B \subset F$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset)$, $\lambda \cdot A \subset n \cdot \Gamma(A)$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > |\lambda|$ $(A \subset F, \lambda \in \mathbb{K})$, sieht man nun leicht, daß $\mathfrak{M} (= \mathfrak{N})$ gesättigt ist.

Sei jetzt $\mathcal{T}$ irgendeine $\langle E,F\rangle$-polare Halbnorm-separable Topologie auf E mit $\mathcal{T} \supset \sigma(E,F)$. Wir zeigen $\mathcal{T} \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{M})$. Aus $\mathcal{T} \supset \sigma(E,F)$ erhält man $G := (E,\mathcal{T})' \supset F$. Wegen $\sigma(G,E) \cap F = \sigma(F,E)$ genügt es zu zeigen, daß für jede $\mathcal{T}$-gleichgradig stetige absolutkonvexe Teilmenge B von G die Topologie $\sigma(G,E) \cap \overline{B}$ metrisierbar ist. Ist B $\mathcal{T}$-gleichgradig stetig, so ist $U := B^o \subset E$ eine $\mathcal{T}$-Nullumgebung. Sei p_U das Eichfunktional zu U. Dann ist p_U eine $\mathcal{T}$-stetige Halbnorm auf E, also ist (E,p_U) nach (5.1b) und (5.2) ein separabler halbnormierter Raum mit $(E,p_U)' =: H$, $H \subset G$. Nach KÖTHE[80, p. 261 (4)] ist $U^o = B^{oo}$ absolutkonvex, $\sigma(H,E)$-kompakt und die Topologie $\sigma(H,E) \cap B^{oo} = \sigma(G,E) \cap B^{oo}$ ist metrisierbar. Wir erhalten also $\eta(E,F) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{M})$.
Andererseits hat man für $\mathcal{Z}(\mathfrak{M})$ die Darstellung $\mathcal{Z}(\mathfrak{M}) = \bigvee \{\mathcal{Z}(B);\ B = \overline{\Gamma(B)} \subset F,\ B$ beschränkt, $\sigma(F,E) \cap B$ ist metrisierbar$\}$. $\mathcal{Z}(B)$ bezeichnet dabei wieder die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf B und diese fällt hier mit der halbnormierten Topologie auf E zusammen, die B^o zur Einheitskugel hat. Es gilt daher auch $(E,\mathcal{Z}(B))' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\cdot\overline{B}^{\sigma(E^*,E)}$. Da $\sigma(E^*,E) \cap \overline{B}$ metrisierbar ist, gibt es eine Folge $(U_n; n\in\mathbb{N})$ von $\sigma(E^*,E)$-Nullumgebungen mit $\bigcap (U_n \cap \overline{B};\ n\in\mathbb{N}) = \{0\}$. Die Nullumgebungen U_n können dabei o.E. in der Form A_n^o, A_n eine endliche Teilmenge von E, angenommen werden. Wir wollen zeigen, daß die abzählbare Teilmenge $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $(E,\mathcal{Z}(B))$ total ist. Sei dazu $x' \in (E,\mathcal{Z}(B))'$. Dann gibt es ein $m\in\mathbb{N}$ mit $m^{-1}\cdot x' \in \overline{B}$. Ist $x'(a) = 0$ für alle $a\in A$, so folgt $m^{-1}\cdot x' \in A_n^o \cap \overline{B} = U_n \cap \overline{B}$ für alle $n\in\mathbb{N}$, also $x' = 0$. $(E,\mathcal{Z}(B))$ ist somit ein separabler halbnormierter Raum und $\mathcal{Z}(\mathfrak{M})$ ist als obere Grenze Halbnorm-separabler Topologien selbst Halbnorm-separabel. Da $\mathcal{Z}(\mathfrak{M})$ nach Definition $\langle E,F\rangle$-polar ist, folgt $\mathcal{Z}(\mathfrak{M}) \subset \eta(E,F)$. Damit sind die Aussagen (a) und (b) bewiesen. Die Aussage (c) ist unmittelbar einzusehen. ./.

<u>(5.9) Bemerkungen.</u>

(a) Aus Satz(5.8b) folgt, daß $\eta(E,F)$ mit der Topologie $\mathcal{Z}(\mathfrak{M}_4)$ aus Korollar (4.5d) übereinstimmt.

(b) Aus (5.8c) folgt, daß $\eta(\mathcal{R})$ für jeden separierten lokalkonvexen Raum $(E,\mathcal{R})$ separiert ist. Es ist nicht zu erwarten, daß $\eta(\mathcal{R})$ für jede kommutative separierte topologische Gruppe $(E,\mathcal{R})$ wieder separiert ist. Mir ist jedoch kein Beispiel einer separierten Gruppentopologie $\mathcal{R}$ auf einer kommutativen Gruppe E bekannt, für die $\eta(\mathcal{R})$ nicht separiert ist.

(c) In (10.22) wird ein separierter lokalkonvexer Raum $(E,\mathcal{R})$ angegeben, für den weder $\eta(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ noch $\eta(\mathcal{R}) \supset \mathcal{R}$ gilt.

$\eta(\mathcal{R})$ ist also i.a. nicht mit $\mathcal{R}$ vergleichbar.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den folgenden Satz vom ORLICZ-PETTIS-Typ beweisen.

(5.10) Satz.
(a) Sei $(E,\mathcal{R})$ eine kommutative separierte topologische Gruppe (ein separierter topologischer linearer Raum) und $\eta(\mathcal{R})$ die feinste $\mathcal{R}$-polare Gruppentopologie (lineare Topologie) vom abzählbaren Typ auf E. Dann haben $\mathcal{R}$ und die obere Grenze $\eta(\mathcal{R})\vee\mathcal{R}$ die gleichen TF-summierbaren Familien.
(b) Für jedes duale Paar $\langle E,F\rangle$ haben $\sigma(E,F)$ und $\eta(E,F)$ die gleichen TF-summierbaren Familien.

Beweis:
Zu (a): Da die zu einem topologischen linearen Raum in der Kategorie der kommutativen topologischen Gruppen gebildete η-Topologie feiner als die in der Kategorie der topologischen linearen Räume gebildete η-Topologie ist, genügt es, den Satz für kommutative topologische Gruppen zu beweisen.

Sei $(E,\mathcal{R})$ eine kommutative separierte topologische Gruppe und $(x_\iota;\iota\in I)$ eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Familie in E. Dann ist die Abbildung $\$[x]:\{0,1\}^I \longrightarrow (E,\mathcal{R})$, $\$[x](J):=\sum_{\iota\in J} x_\iota$ $(J\subset I)$ nach Satz (1.5) und Lemma (1.7) stetig. Da $\eta(\mathcal{R})\vee\mathcal{R}$ eine Nullumgebungsbasis aus $\mathcal{R}$-abgeschlossenen Mengen besitzt, genügt es nach Satz (3.4a) zu zeigen, daß $(x_\iota;\iota\in I)$ die $\eta(\mathcal{R})$-CAUCHY-Bedingung erfüllt. Nach Satz (1.5) genügt es also zu zeigen, daß die Abbildung $\$[x]:\{0,1\}^I \longrightarrow (E,\eta(\mathcal{R}))$ in $0\in\{0,1\}^I$ stetig ist. Sei dazu $U=\overline{U}^{\mathcal{R}}\in\mathcal{U}_0(E,\eta(\mathcal{R}))$. Da $\eta(\mathcal{R})$ vom abzählbaren Typ ist, gibt es eine Folge $(a_n;n\in\mathbb{N})$ in E mit $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n+U)$. Mit der Stetigkeit von $\$[x]:\{0,1\}^I\longrightarrow(E,\mathcal{R})$ folgt die Abgeschlossenheit von $V_n:=\$[x]^{-1}(a_n+U)$ $(n\in\mathbb{N})$ und es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n=\{0,1\}^I$. Der Raum $\{0,1\}^I$ ist als kompakter Raum BAIRE'sch (BOURBAKI[22, p. 110, Th. 1]). Also gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ mit $\mathring{V}_n=\emptyset$. Da $\{0,1\}^{(I)}$ in $\{0,1\}^I$ dicht ist, gibt es $\sigma,\tau\in\mathcal{F}(I)$, so daß mit den Bezeichnungen aus §1 (p. 2 u. 3) gilt:
$\chi_\tau+U_0(\sigma)\subset V_n$, d.h. $\chi_\tau+\chi_L\subset V_n$ für alle $L\subset I$ mit $L\cap\sigma=\emptyset$.
Dabei kann man o.E. $\sigma\supset\tau$ annehmen. Man erhält dann:
$\$[x](\tau)+\$[x](L)\in a_n+U$ für alle $L\subset I$ mit $L\cap\sigma=\emptyset$,
$\$[x](\tau)\in a_n+U.\Longrightarrow\$[x](L)\in U-U$ für alle $L\subset I$ mit $L\cap\sigma=\emptyset$.
$\Longrightarrow\$[x]:\{0,1\}^I\longrightarrow(E,\eta(\mathcal{R}))$ ist stetig in 0.

Zu (b): Dies folgt unmittelbar aus (a). Mit Satz (5.8b) sieht man daß (5.10b) mit der Aussage (4.5d) zusammenfällt. (5.10b) wurde hier lediglich der geänderten Bezeichnung wegen nochmals aufgeführt. ./.

(5.11) Bemerkungen.

(a) Die Beweismethode zu Satz (5.10a) geht auf DREWNOWSKI[42, p. 233, Th. 1] zurück. Dort wird gezeigt:
Sei G eine kommutative Gruppe und $\mathcal{R},\mathcal{T}$ seien zwei separierte Gruppentopologien auf G. $\mathcal{T}$ besitze eine Nullumgebungsbasis aus $\mathcal{R}$-Folgen-abgeschlossenen Mengen und $m: \mathrm{Pot}(\mathbb{N}) \longrightarrow (G,\mathcal{R})$ sei eine σ-additive Mengenfunktion. Weiterhin existiere zu jedem $V \in \mathcal{U}_0(E,\mathcal{T})$ eine abzählbare Teilmenge A von G mit $m(\mathrm{Pot}(\mathbb{N})) \subset A + V$. Dann ist auch $m: \mathrm{Pot}(\mathbb{N}) \longrightarrow (G,\mathcal{T})$ σ-additiv.

(b) Ein Spezialfall von Satz (5.10a) wurde zuerst von KALTON[70, p. 409, Th. 7] bewiesen. Satz (5.10b) wurde unabhängig von dem Resultat von DREWNOWSKI[42] vom Autor (DIEROLF[36]) bewiesen. Der dort angegebene Beweis verwendet auch nicht Satz (4.3).

(5.12) Beispiele.

In den beiden folgenden Beispielen (a) und (b) liefert Satz (5.10) einen neuen (einfacheren) Beweis für teilweise bekannte Aussagen. (Vgl. THOMAS[121, p. 6, ex. 1, p. 7, ex. 2 u. p. 13, Corollaire]. Dort werden diese Aussagen für Folgen und mit anderen Methoden bewiesen.)

(a) Sei K ein kompakter metrischer Raum, D eine dichte Teilmenge von K. Auf $C(K)$ betrachten wir die Topologie $\mathcal{T}_D$ der punktweisen Konvergenz auf D. $\mathcal{T}_D$ ist separiert und die Einheitskugel in $(C(K),\|\cdot\|_\infty)$ ist $\mathcal{T}_D$-abgeschlossen. Da K metrisierbar ist, ist $(C(K),\|\cdot\|_\infty)$ separabel (BOURBAKI[24, p. 40, Th. 1]). Mit (5.10b) erhält man also: $\mathcal{T}_D$ und die $\|\cdot\|_\infty$-Topologie auf $C(K)$ haben für metrisierbares K die gleichen TF-summierbaren Familien.

(b) Ebenso sieht man mit Satz (5.10a), daß für $p \in (0,\infty)$ die Topologie der punktweisen Konvergenz auf I und die $\|\cdot\|_p$-Topologie auf $l^p(I)$ die gleichen TF-summierbaren Folgen besitzen. Denn die Einheitskugel in $(l^p,\|\cdot\|_p)$ ist abgeschlossen in der Topologie der punktweisen Konvergenz auf I und jede Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in $l^p(I)$ liegt bereits in einem $l^p(J)$ für eine abzählbare Teilmenge J von I.

Für Familien kann man wie folgt schließen: Sei $(x_\kappa; \kappa \in K)$ eine Familie in $l^p(I)$, die TF-summierbar ist bezüglich der Topologie der

punktweisen Konvergenz auf I. Für jede abzählbare Teilmenge L von K ist dann $(x_\kappa;\kappa\in L)$ nach obigen Überlegungen $\|\cdot\|_p$-TF-summierbar. Insbesondere erfüllt $(x_\kappa;\kappa\in L)$ also die $\|\cdot\|_p$-CAUCHY-Bedingung. Mit Satz (1.5) und Satz (3.4a) folgt die $\|\cdot\|_p$-TF-Summierbarkeit von $(x_\kappa;\kappa\in K)$.

(c) Die Metrisierbarkeit ist in (5.12a) wesentlich, wie folgendes Beispiel zeigt. Sei $K:=\beta(\mathbb{N})$ die STONE-ČECH-Kompaktifizierung von $(\mathbb{N},\mathrm{Pot}(\mathbb{N}))$. Dann ist $(C(K),\|\cdot\|_\infty)$ topologisch isomorph zu $(l^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ und für $D:=\mathbb{N}$ ist $\mathcal{F}_D$ gerade die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{N}$. Die Folge $(e_n;n\in\mathbb{N})$ der Einheitsvektoren in l^∞ ist $\mathcal{F}_D$-TF-summierbar. In der $\|\cdot\|_\infty$-Topologie ist $(e_n;n\in\mathbb{N})$ jedoch nicht summierbar.

(d) In diesem Zusammenhang ist folgendes Resultat von DIESTEL, FAIRES[39, p. 255] bemerkenswert:

Für einen BANACH-Raum $(E,\|\cdot\|)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(d.1) $(E,\|\cdot\|)$ enthält keinen zu $(l^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ topologisch isomorphen Teilraum.

(d.2) Für jeden dichten Teilraum H von $(E',\sigma(E',E))$ haben $\sigma(E,H)$ und die $\|\cdot\|$-Topologie die gleichen TF-summierbaren Folgen.

Man vergleiche hierzu auch GROTHENDIECK[59, p. 217, ex. 3]. Diese Aufgabe ist jedoch falsch gestellt, wie (5.12c) zeigt.

Kriterien für die Halbnorm-Separabilität verschiedener Topologien auf $C_b(X)$ (X vollständig regulär) findet man bei GULICK, SCHMETS [60].

<u>(5.13) Beispiel.</u>

Sei E ein $\mathbb{K}$-linearer Raum mit $\dim(E) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$. Für jede separierte lokalkonvexe Topologie $\mathcal{R}$ auf E gilt dann $\eta(\mathcal{R}) = \tau(E,E^*)$ = feinste lokalkonvexe Topologie auf E. Da in der Topologie $\tau(E,E^*)$ alle beschränkten Mengen endlich dimensional sind (KELLEY, NAMIOKA[77, p. 53, Problem I]), ist nach Satz (1.9) und Satz (5.10b) jede $\mathcal{R}$-TF-summierbare Familie in E endlich dimensional.

<u>Bew.:</u> Da auf einem abzählbar dimensionalen Raum jede lokalkonvexe Topologie separabel ist, genügt es zu zeigen, daß $\beta(E,E')$ für $\dim(E) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$ mit der feinsten lokalkonvexen Topologie übereinstimmt. Dies geschieht nach der Anleitung aus BOURBAKI[27, p. 3, ex. 4] . Sei $(a_n;n\in\mathbb{N})$ eine algebraische Basis von E. Wir konstruieren induktiv eine topologisch freie Basis $(b_n;n\in\mathbb{N})$ von

$(E,\mathcal{R})$. $b_1 := a_1$. Zu $[a_1]$ existiert ein topologischer Komplementärraum M_1; $E = [b_1] \dotplus M_1$. Seien jetzt $b_1,\dots,b_n \in E$ und Teilräume $M_1,\dots,M_n$ von E schon so konstruiert, daß $[a_1,\dots,a_n] = [b_1,\dots b_n]$ und $M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n$ gilt, daß für $k = 1,\dots,n$, $E = [b_1,\dots,b_k] \dotplus M_k$ gilt und diese Zerlegung auch $\mathcal{R}$-topologisch ist. Dann existieren $x \in [b_1,\dots,b_n]$, $y \in M_n$ mit $a_{n+1} = x + y$. Wir setzen $b_{n+1} := y$ und wählen einen topologischen Komplementärraum M_{n+1} zu $[b_{n+1}]$ in M_n. Offenbar ist $(b_n; n \in \mathbb{N})$ eine algebraische Basis von E. Um zu zeigen, daß die Koeffizientenfunktionale f_n zu b_n auf $(E,\mathcal{R})$ stetig sind, betrachten wir die Basisdarstellung $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)\cdot b_k$ eines beliebigen Elementes $x \in E$. (In dieser Summe sind nur endlich viele Terme von Null verschieden.) Mit der topologischen Zerlegung $E = [b_1,\dots,b_n] \dotplus M_n$ erhält man die Stetigkeit der Abbildung $p_n : (E,\mathcal{R}) \longrightarrow [b_1,\dots,b_n]$, $p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\cdot b_k$ $(n \in \mathbb{N})$, und da $[b_1,\dots,b_n]$ endlich dimensional ist, folgt die Stetigkeit von $f_n : (E,\mathcal{R}) \longrightarrow \mathbb{K}$. Sei $T : \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow E$ durch $T(e_n) := b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und lineare Fortsetzung definiert. Mit der algebraisch transponierten Abbildung $T^* : E^* \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ setzen wir $F' := T^*(E')$ und haben dann in $T : (\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \sigma(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, F')) \longrightarrow (E, \sigma(E,E'))$ einen topologischen Isomorphismus. Aus $f_n \in E'$ $(n \in \mathbb{N})$ folgt $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subset F'$. Wegen $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})^* = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ genügt es also $\beta(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}) = \beta(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ zu zeigen. Dies folgt aber unmittelbar aus der Gestalt der $\beta(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{K}^{(\mathbb{N})})$-stetigen Halbnormen und der Tatsache, daß man jede $\sigma(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathbb{K}^{(\mathbb{N})})$-beschränkte Teilmenge des $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ im $\sigma(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathbb{K}^{(\mathbb{N})})$-Abschluß einer $\sigma(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{K}^{(\mathbb{N})})$-beschränkten Teilmenge des $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ findet.

Mit (5.13) erhält man nun leicht ein Beispiel dafür, daß die η-Topologie sich nicht auf Teilräume vererbt.

<u>(5.14) Beispiel.</u>
$(E,\mathcal{R}) := (c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $F := \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Da $\mathcal{R} = \beta(E,E')$ separabel ist, gilt $\eta(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$. Es ist $\dim(F) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$, also ist $\eta(\mathcal{R} \cap F) = \tau(F,F^*) \supsetneqq \mathcal{R} \cap F$. Mit der Konstruktion aus ROELCKE et al. [109, p. 513, 1.] kann man analog zeigen, daß die η-Topologie sich auch nicht auf abgeschlossene Teilräume vererbt.

III. Kapitel

Assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologien

In diesem Kapitel beweisen wir Existenz und Charakterisierungen der assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie.

Vorbereitend werden dazu in §6 die Paare vergleichbarer Topologien charakterisiert, für die der Satz von ORLICZ-PETTIS zutrifft. In §7 werden Existenz, erste Eigenschaften und Beispiele der assoziierten ORLICZ-PETTIS-TOPOLOGIE behandelt. In §8 wird die assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie als verallgemeinerter induktiver Limes im Sinne von GARLING[52] bzw. IYAHEN, POPOOLA[67] dargestellt. Nullumgebungsfilter für die zu $\mathcal{R}$ assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ werden in §9 angegeben.

§ 6 ORLICZ-PETTIS-Paare.

Der wesentliche Inhalt des Satzes von ORLICZ-PETTIS ist der Schluß von "TF-summierbar" in einer vorgegebenen Topologie auf "TF-summierbar" in einer feineren Topologie. Dies gibt Anlaß zu folgendem Satz.

(6.1) Satz. Sei E eine kommutative Gruppe und $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$ seien separierte Gruppentopologien auf E. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Ist $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge in E, so ist $(x_n; n \in \mathbb{N})$ auch $\mathcal{T}$-summierbar (und damit auch $\mathcal{T}$-TF-summierbar).

(b) Ist $\mathfrak{A}$ ein σ-Ring und $m: \mathfrak{A} \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ σ-additiv, so ist auch $m: \mathfrak{A} \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ σ-additiv.

(c) Ist $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge in E, $A := \overline{\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))}^{\mathcal{R}}$, so gilt $\mathcal{R} \cap A = \mathcal{T} \cap A$.

Jede dieser Aussagen wird impliziert von:

(d) Ist I eine beliebige Indexmenge und ist $(x_\iota; \iota \in I)$ $\mathcal{R}$-TF-summierbar, so ist $(x_\iota; \iota \in I)$ auch $\mathcal{T}$-summierbar (und damit auch $\mathcal{T}$-TF-summierbar).

Jede der Aussagen (a),...,(d) impliziert die untereinander äquivalenten Aussagen:

(e) Für jede $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in E gilt $\lim_{n \to \infty} {}_{\mathcal{T}}\, x_n = 0$.

(f) Jede $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in E erfüllt die $\mathcal{T}$-CAUCHY-Bedingung.

(g) Für jede $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in E ist die Mengenfunktion $\$[x]: \mathcal{F}(\mathbb{N}) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ s-additiv. (D.h. es gilt: Ist $(\sigma_n; n \in \mathbb{N})$ eine Folge in $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, so ist $\lim_{n \to \infty} {}_{\mathcal{T}}\, \$[x](\sigma_n) = 0$.)

(h) Ist $\mathfrak{A}$ ein σ-Ring und $m:\mathfrak{A}\longrightarrow(E,\mathfrak{R})$ σ-additiv, so ist $m:\mathfrak{A}\longrightarrow(E,\mathfrak{T})$ s-additiv.

Ist zusätzlich eine der drei folgenden Voraussetzungen erfüllt, so sind die Aussagen (a),...,(h) äquivalent.

(I) $(E,\mathfrak{T})$ ist ξ-Σ-vollständig, wobei ξ die Kardinalität einer Nullumgebungsbasis von $(E,\mathfrak{T})$ ist.(Hierbei kann ξ durch eine analog zu (1.10) bestimmte Schranke ersetzt werden.)

(II) $\mathfrak{T}$ ist $\mathfrak{R}$-polar, d.h. $\mathfrak{T}$ besitzt eine Nullumgebungsbasis aus $\mathfrak{R}$-abgeschlossenen Mengen.

(III) Jede $\mathfrak{R}$-TF-summierbare Familie, die die $\mathfrak{T}$-CAUCHY-Bedingung erfüllt, ist auch $\mathfrak{T}$-summierbar.

<u>Beweis:</u>

<u>(d)$\Longrightarrow$(a)</u> ist unmittelbar zu sehen.

<u>(a)$\Longrightarrow$(b):</u> Sei $(A_n;n\in\mathbb{N})$ eine Folge in $\mathfrak{A}$ mit $A_i\cap A_j=\emptyset$ für $i\neq j$. Da $m:\mathfrak{A}\longrightarrow(E,\mathfrak{R})$ σ-additiv ist, ist $(m(A_j);j\in\mathbb{N})$ $\mathfrak{R}$-TF-summierbar, also nach (a) auch $\mathfrak{T}$-TF-summierbar (zu den gleichen Summenwerten). Daraus folgt, daß auch $m:\mathfrak{A}\longrightarrow(E,\mathfrak{T})$ σ-additiv ist.

<u>(b)$\Longrightarrow$(a):</u> Sei $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine $\mathfrak{R}$-TF-summierbare Folge in E. Dann ist $\$[x]:\mathrm{Pot}(\mathbb{N})\longrightarrow(E,\mathfrak{R})$, $\$[x](J):=\sum_{i\in J}x_i$, eine σ-additive Mengenfunktion. Nach (b) ist daher auch $\$[x]:\mathrm{Pot}(\mathbb{N})\longrightarrow(E,\mathfrak{T})$ σ-additiv. Daraus folgt die $\mathfrak{T}$-TF-Summierbarkeit von $(x_n;n\in\mathbb{N})$ (zu den gleichen Summenwerten).

<u>(a)$\Longrightarrow$(c):</u> Ist $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine $\mathfrak{R}$-TF-summierbare Folge in E, so ist $(x_n;n\in\mathbb{N})$ nach (a) auch $\mathfrak{T}$-TF-summierbar. Nach (1.8) ist deshalb $D:=\overline{\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))}^{\mathfrak{T}}$ $\mathfrak{T}$-kompakt und mit der Separiertheit von $\mathfrak{R}$ erhält man aus $\mathfrak{T}\supset\mathfrak{R}$ die Beziehung $\mathfrak{T}\cap D=\mathfrak{R}\cap D$. Insbesondere ist D auch $\mathfrak{R}$-abgeschlossen. Daher gilt $A\subset D$. Mit $\mathfrak{T}\supset\mathfrak{R}$ folgt $D\subset A$ und damit die Behauptung.

<u>(c)$\Longrightarrow$(a):</u> Ist $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine $\mathfrak{R}$-TF-summierbare Folge in E, $A:=\overline{\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))}^{\mathfrak{R}}$, so gilt $\mathfrak{R}\cap A=\mathfrak{T}\cap A$. Daher stimmen in A die $\mathfrak{R}$-konvergenten Netze und die $\mathfrak{T}$-konvergenten Netze überein. $(x_n;n\in\mathbb{N})$ ist folglich auch $\mathfrak{T}$-summierbar.

<u>(a)$\Longrightarrow$(e):</u> Sei $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine $\mathfrak{R}$-TF-summierbare Folge in E. Nach (a) ist dann $(x_n;n\in\mathbb{N})$ auch $\mathfrak{T}$-TF-summierbar. Mit (2.2) folgt daher $\lim_{n\to\infty}{}_{\mathfrak{T}}\,x_n=0$.

<u>(e)$\Longrightarrow$(f):</u> Sei $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine $\mathfrak{R}$-TF-summierbare Folge in E, die nicht die $\mathfrak{T}$-CAUCHY-Bedingung erfüllt. Dann gibt es ein

$V \in \mathcal{U}_0(E,\mathcal{T})$, so daß zu jedem $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ ein $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit $\sigma \cap \tau = \emptyset$ und $(\sum_{\iota\in\tau} x_\iota) \notin V$ existiert. Es gibt daher eine Folge $(\sigma_n; n\in\mathbb{N})$ in $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ und $y_n := \sum_{\iota\in\sigma_n} x_\iota \notin V$ $(n\in\mathbb{N})$. Da $(x_n; n\in\mathbb{N})$ nach Voraussetzung $\mathcal{R}$-TF-summierbar ist, ist $(x_i; i\in J)$ mit $J := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n$ auch $\mathcal{R}$-TF-summierbar. Aus der Gültigkeit des Assoziativgesetzes für TF-summierbare Familien (BOURBAKI[23, p. 63, Th. 2]) folgt, daß auch $(y_n; n\in\mathbb{N})$ $\mathcal{R}$-TF-summierbar ist. Es gilt jedoch nicht $\lim_{n\to\infty}{}_{\mathcal{T}}\, y_n = 0$. Damit ist "(e) $\Longrightarrow$ (f)" gezeigt.

<u>(f) $\Longleftrightarrow$ (g):</u> Dies folgt unmittelbar aus Satz (1.5).

<u>(g) $\Longrightarrow$ (h):</u> Sei $\mathfrak{A}$ ein σ-Ring, $m: \mathfrak{A} \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ σ-additiv und $(A_n; n\in\mathbb{N})$ eine Folge in $\mathfrak{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. Dann ist $x := (m(A_n); n\in\mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge. Wendet man (g) auf die Folge $\sigma_n := \{n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ an, so folgt $\lim_{n\to\infty}{}_{\mathcal{T}}\, \$[x](\sigma_n) = \lim_{n\to\infty}{}_{\mathcal{T}}\, m(A_n) = 0$.

<u>(h) $\Longrightarrow$ (e):</u> Für jede $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge $(x_n; n\in\mathbb{N})$ in E ist die Mengenfunktion $\$[x]: \mathrm{Pot}(\mathbb{N}) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ σ-additiv, also nach (h) auch s-additiv bezüglich $\mathcal{T}$. Mit $\sigma_n := \{n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ folgt daher $\lim_{n\to\infty}{}_{\mathcal{T}}\, \$[x](\sigma_n) = \lim_{n\to\infty}{}_{\mathcal{T}}\, x_n = 0$.

Man hat also:

$$\begin{array}{ccccccc}
(d) & \Longrightarrow & (a) & \Longleftrightarrow & (b) & \Longleftrightarrow & (c) \\
 & & \Downarrow & & & & \\
 & & (e) & \Longleftarrow & (h) & & \\
 & & \Downarrow & & \Uparrow & & \\
 & & (f) & \Longleftrightarrow & (g). & &
\end{array}$$

Sei jetzt zusätzlich (I) erfüllt. Dann gilt offenbar "(f) $\Longrightarrow$ (a)". Es genügt daher etwa "(a) $\Longrightarrow$ (d)" zu beweisen. Sei dazu $(x_\iota; \iota\in I)$ eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Familie in E. Ist $(x_\iota; \iota\in I)$ nicht $\mathcal{T}$-summierbar, so ist das wegen (I) nur dann möglich, wenn $(x_\iota; \iota\in I)$ nicht die $\mathcal{T}$-CAUCHY-Bedingung erfüllt. Nach (1.5) gibt es dann eine abzählbare Teilmenge J von I, so daß $(x_\iota; \iota\in J)$ nicht die $\mathcal{T}$-CAUCHY-Bedingung erfüllt. $(x_\iota; \iota\in J)$ ist aber insbesondere eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge. Also ist (a) nicht erfüllt. Wir haben damit "(a) $\Longrightarrow$ (d)" bewiesen. Unter der Zusatzvoraussetzung (I) sind daher die Aussagen (a),...,(h) äquivalent.

Nach (3.4) folgt (III) aus (II) und mit (III) erhält man offenbar "(f) $\Longrightarrow$ (a)". Wie oben kann man nun unter der Zusatzvoraussetzung (III) die Implikation "(a) $\Longrightarrow$ (d)" beweisen und erhält: Unter jeder der beiden Zusatzvoraussetzungen (II), (III) sind die Aussagen (a),...,(h) äquivalent. ./.

(6.2) Bemerkungen.
(a) Die Äquivalenz von (6.1a), (6.1b), (6.1d) und (6.1e) steht für Spezialfälle in den Arbeiten von THOMAS[122, p. 179; 123, p. 11].
(b) Bei den nachfolgenden Untersuchungen wird vor allem an Anwendungen in der Maßtheorie gedacht (vgl. (6.1b)). Daher erscheint die Beschränkung auf Folgen sinnvoll.
(c) Ein zu Satz (6.1) ähnlicher Satz läßt sich für BM-Summierbarkeit in separierten topologischen linearen (bzw. lokalkonvexen) Räumen beweisen.

(6.3) Definition. Sei E eine kommutative Gruppe und $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$ seien separierte Gruppentopologien auf E. $(\mathcal{R},\mathcal{T})$ heißt ORLICZ-PETTIS-Paar, wenn (6.1a) erfüllt ist, d.h. wenn gilt:

Ist $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge in E, so ist $(x_n; n \in \mathbb{N})$ auch $\mathcal{T}$-summierbar (und damit $\mathcal{T}$-TF-summierbar).

Diese Begriffsbildung übernehmen wir im wesentlichen von THOMAS [122, p. 89]. In obiger Terminologie besagt der Satz von ORLICZ-PETTIS, daß für jeden separierten lokalkonvexen Raum $(E,\mathcal{T})$ die Topologien $\sigma(E,E')$ und $\tau(E,E')$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar bilden.

Die Vergleichbarkeit der Topologien $\mathcal{R}$ und $\mathcal{T}$ in Satz (6.1) bzw. in Definition (6.3) ist keine wesentliche Einschränkung. Sind nämlich $\mathcal{R}$ und $\mathcal{T}$ unvergleichbare Topologien, die die gleichen TF-summierbaren Folgen besitzen, so sind $(\mathcal{R},\mathcal{R}\vee\mathcal{T})$ und $(\mathcal{T},\mathcal{R}\vee\mathcal{T})$ ORLICZ-PETTIS-Paare im Sinne von Definition (6.3).

Mit Definition (3.1) erhält man unmittelbar:

(6.4) Korollar. Ist $(\mathcal{R},\mathcal{T})$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar und ist $\mathcal{R}$ Σ-vollständig, so ist auch $\mathcal{T}$ Σ-vollständig.

Zur Verschärfung des Satzes von ORLICZ-PETTIS bieten sich nun zwei Möglichkeiten an:

1.) Man fasse die gegebene Topologie als $\mathcal{T}$ auf und versuche $\mathcal{R}$ "möglichst grob" so zu bestimmen, daß $(\mathcal{R},\mathcal{T})$ noch ein ORLICZ-PETTIS-Paar ist.

Zu dieser Aufgabenstellung findet man Ergebnisse bei DIESTEL, FAIRES[39, p. 255], DREWNOWSKI[40, p. 516; 41, p. 799; 42, p. 233], DREWNOWSKI, LABUDA[44, p. 123], KALTON[70, p. 407, p. 409; 72, p. 266], LABUDA[83-86], THOMAS[120; 121; 122, p. 179; 123, p. 11] und TWEDDLE[129, p. 470].

Das folgende Beispiel zeigt, daß es unter allen separierten Topologien $\mathcal{R}$, für die $(\mathcal{R},\mathcal{T})$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar ist, im allgemeinen keine gröbste gibt.

<u>(6.5) Beispiel.</u> Sei $(E,\|\cdot\|)$ ein unendlich dimensionaler BANACH-Raum, der keinen zu $(l^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ topologisch isomorphen Teilraum enthält. Nach dem auf p. 59 zitierten Resultat von DIESTEL, FAIRES [39, p. 255] gilt dann:

Für jeden $\sigma(E',E)$-dichten Teilraum H von E' ist $(\sigma(E,H), \mathcal{T}_{\|\cdot\|})$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar.

Sei H_1 eine dichte Hyperebene und G eine abgeschlossene Hyperebene in E'. Mit $a \in H_1 \setminus (H_1 \cap G)$, $b \in G \setminus H_1$ bilden wir $H_2 := H_1 \cap G + [a+b]$. Dann gilt $H_1 \cap H_2 \subset G$, d.h. $H_1 \cap H_2$ ist nicht dicht. H_2 ist jedoch dicht, denn es gilt $\overline{H_2} \supset \overline{H_1 \cap G} + [a+b] = G + [a+b] = G + [a] = E'$. Nach obigem Resultat haben daher $\sigma(E,H_1)$ und $\sigma(E,H_2)$ die gleichen TF-summierbaren Folgen. Sei $\mathcal{T} := \sigma(E,H_1) \overset{loc}{\wedge} \sigma(E,H_2)$ die lokalkonvexe untere Grenze der Topologien $\sigma(E,H_1)$ und $\sigma(E,H_2)$. Man sieht leicht, daß $(E,\mathcal{T})' = H_1 \cap H_2$ gilt. $\mathcal{T}$ ist also nicht separiert und besitzt deshalb mehr TF-summierbare Folgen als die Topologien $\sigma(E,H_1)$ und $\sigma(E,H_2)$.

Als zweite Möglichkeit zur Verschärfung des Satzes von ORLICZ-PETTIS bleibt:

2.) Man fasse die gegebene Topologie als $\mathcal{R}$ auf und versuche $\mathcal{T}$ "möglichst fein" so zu bestimmen, daß $(\mathcal{R},\mathcal{T})$ noch ein ORLICZ-PETTIS-Paar ist.

Wir werden beweisen, daß man zu jeder separierten Gruppentopologie $\mathcal{R}$ auf einer kommutativen Gruppe E eine feinste Gruppentopologie $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ bestimmen kann, die die gleichen TF-summierbaren Folgen besitzt wie $\mathcal{R}$. Entsprechende Aussagen gelten für topologische lineare Räume und für lokalkonvexe Räume. Der Charakterisierung dieser zu $\mathcal{R}$ assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ dienen die folgenden Untersuchungen.

§ 7 Die assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie (OP-Topologie).

(7.1) Satz. Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter topologischer linearer Raum (ein separierter lokalkonvexer Raum, eine kommutative separierte topologische Gruppe). Unter allen linearen Topologien (lokalkonvexen Topologien, Gruppentopologien) $\mathcal{T}$ auf E, für die $(\mathcal{R},\mathcal{T})$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar ist, gibt es eine feinste, die wir mit $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ bezeichnen.

Ist $T: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ eine stetige lineare Abbildung (ein stetiger Gruppenhomomorphismus), so ist auch $T: (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,\mathcal{OP}(\mathcal{F}))$ stetig.

Beweis: Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter topologischer linearer Raum. Zu jeder TF-summierbaren Folge $(x_n;n\in\mathbb{N})$ betrachten wir das Netz $(\$[x](\sigma);\ \sigma\in\mathcal{F}(\mathbb{N}))$ und setzen $\mathfrak{M}(\mathcal{R}):=\{\mathcal{T};\ \mathcal{T}$ eine lineare Topologie auf E, so daß für alle $\mathcal{R}$-TF-summierbaren Folgen $x:=(x_n;n\in\mathbb{N})$ das Netz $(\$[x](\sigma);\ \sigma\in\mathcal{F}(\mathbb{N}))$ $\mathcal{T}$-konvergent ist$\}$.

$\mathcal{OP}(\mathcal{R}):=\bigvee\mathfrak{M}(\mathcal{R})$ ist die Initialtopologie auf E bezüglich der Abbildungen $id_E: E \longrightarrow (E,\mathcal{T})$ $(\mathcal{T}\in\mathfrak{M}(\mathcal{R}))$. Es genügt $\mathcal{OP}(\mathcal{R})\in\mathfrak{M}(\mathcal{R})$ zu zeigen. Sei dazu $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge in E. Dann ist $(\$[x](\sigma);\sigma\in\mathcal{F}(\mathbb{N}))$ für alle $\mathcal{T}\in\mathfrak{M}(\mathcal{R})$ $\mathcal{T}$-konvergent, also auch konvergent bezüglich $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$. Jede $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge ist also auch $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-TF-summierbar. Wegen $\mathcal{OP}(\mathcal{R})\supset\mathcal{R}$ ist jede $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-TF-summierbare Folge auch $\mathcal{R}$-TF-summierbar. Da $\mathcal{R}$ separiert ist, ist auch $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ stets separiert.

Sei jetzt $(F,\mathcal{F})$ ein weiterer separierter topologischer linearer Raum und $T: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ linear und stetig. Ist $(x_n;n\in\mathbb{N})$ $\mathcal{R}$-TF-summierbar, so ist $(T(x_n);n\in\mathbb{N})$ $\mathcal{F}$-TF-summierbar, also auch $\mathcal{OP}(\mathcal{F})$-TF-summierbar. Deshalb ist $(x_n;n\in\mathbb{N})$ auch TF-summierbar bezüglich der Initialtopologie $T^{-1}(\mathcal{OP}(\mathcal{F}))$ auf E. $\Longrightarrow$ $T^{-1}(\mathcal{OP}(\mathcal{F}))\in\mathfrak{M}(\mathcal{R}) \Longrightarrow T^{-1}(\mathcal{OP}(\mathcal{F}))\subset\mathcal{OP}(\mathcal{R})$. Daher ist $T: (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,\mathcal{OP}(\mathcal{F}))$ stetig.

Die Modifikationen dieses Beweises für lokalkonvexe Räume bzw. für kommutative topologische Gruppen sind offensichtlich. ./.

In der Situation von Satz (7.1) nennen wir $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ die zu $\mathcal{R}$ (in der jeweiligen Kategorie) assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie. Aus dem Zusammenhang wird stets ersichtlich sein, in welcher Kategorie $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ gebildet wird; wir unterscheiden das nicht in der Bezeichnung.

Analog zu Satz (7.1) beweist man:

(7.2) Satz. Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter topologischer linearer Raum (lokalkonvexer Raum). Unter allen linearen (lokalkonvexen) Topologien $\mathcal{T}$ auf E, für die $\mathcal{R}$ und $\mathcal{T}$ die gleichen BM-summierbaren Folgen besitzen, gibt es eine feinste, die wir mit $BM\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ bezeichnen.

Ist $T: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ eine stetige lineare Abbildung, so ist auch $T: (E,BM\mathcal{OP}(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,BM\mathcal{OP}(\mathcal{F}))$ stetig.

(7.3) Bemerkungen.

(a) In den Sätzen (7.1) und (7.2) kann man auch statt Folgen Familien (mit oder ohne Mächtigkeitsschranke für die Indexmenge) betrachten. Ist $(E,\mathcal{R})$ eine separierte topologische Gruppe und sind $\alpha \leq \beta$ zwei Kardinalzahlen, so besteht zwischen den entsprechend assoziierten OP-Topologien offenbar die Inklusion $\mathcal{OP}_\beta(\mathcal{R}) \subset \mathcal{OP}_\alpha(\mathcal{R})$. Assoziierte OP-Topologien für Familien mit überabzählbarer Indexmenge werden hier nicht weiter untersucht.

(b) Viele Aussagen über die OP-Topologie besitzen für topologische lineare bzw. lokalkonvexe Räume ein Gegenstück mit $BM\mathcal{OP}$. Wir werden das nur dort herausformulieren, wo sich wesentliche Unterschiede ergeben. Im allgemeinen gestalten sich die Beweise für $BM\mathcal{OP}$ etwas einfacher, da man zusätzliche Konvexitätseigenschaften (siehe (1.21)) ausnutzen kann. Man vergleiche hierzu insbesondere §8 und §9.

(c) Für jeden separierten topologischen linearen Raum $(E,\mathcal{R})$ gilt $BM\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{OP}(\mathcal{R})$. In (7.14) werden wir ein Beispiel für $BM\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \supsetneqq \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ angeben.

(d) Im Spezialfall der lokalkonvexen Räume wurde die Existenz von $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ von TWEDDLE[130] mit Methoden der Dualitätstheorie bewiesen.

Aus Satz (7.1) erhält man die folgenden Korollare:

(7.4) Korollar. Die Bildung von $\mathcal{OP}$ ist idempotent, d.h. es gilt stets $\mathcal{OP}(\mathcal{OP}(\mathcal{R})) = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$.

(7.5) Korollar. Ist $(E,\mathcal{R})$ eine kommutative separierte topologische Gruppe und F eine Untergruppe von E, so gilt $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \cap F \subset \mathcal{OP}(\mathcal{R} \cap F)$.
Eine entsprechende Aussage gilt für topologische lineare und für lokalkonvexe Räume.

Beweis: Die kanonische Inklusion $i_F: (F,\mathcal{R} \cap F) \hookrightarrow (E,\mathcal{R})$ ist stetig. $\Longrightarrow$ $i_F: (F,\mathcal{OP}(\mathcal{R} \cap F)) \hookrightarrow (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ ist stetig. $\Longrightarrow$ $\mathcal{OP}(\mathcal{R} \cap F) \supset \mathcal{OP}(\mathcal{R}) \cap F$. ./.

Sei $(E,\mathcal{R})$ ein BANACH-Raum und F ein linearer Teilraum mit $\dim(F)=\mathrm{card}(\mathbb{N})$. In (11.9b) werden wir sehen, daß $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ gilt. Aus Beispiel (5.13) folgt $\mathcal{OP}(\mathcal{R}\cap F) = \tau(F,F^*)$. In diesem Beispiel ist daher $\mathcal{OP}(\mathcal{R})\cap F \subsetneq \mathcal{OP}(\mathcal{R}\cap F)$. Mit den Ergebnissen aus §12 und der Anmerkung aus S.DIEROLF[37, p. 42] kann man sehen, daß die OP-Topologie sich auch nicht auf abgeschlossene Teilräume vererbt.

<u>(7.6) Korollar.</u> Ist $((E_\iota,\mathcal{R}_\iota);\iota\in I)$ eine Familie kommutativer separierter topologischer Gruppen, so gilt $\prod_{\iota\in I}\mathcal{OP}(\mathcal{R}_\iota)\subset \mathcal{OP}(\prod_{\iota\in I}\mathcal{R}_\iota)$. Eine entsprechende Aussage gilt für topologische lineare und für lokalkonvexe Räume.

<u>Beweis:</u> Für jedes $\iota\in I$ ist $p_\iota:\prod_{\kappa\in I}(E_\kappa,\mathcal{R}_\kappa)\longrightarrow(E_\iota,\mathcal{R}_\iota)$ stetig. Also ist auch $p_\iota:(\prod_{\kappa\in I}E_\kappa,\mathcal{OP}(\prod_{\kappa\in I}\mathcal{R}_\kappa))\longrightarrow(E_\iota,\mathcal{OP}(\mathcal{R}_\iota))$ stetig. ./.
Korollar (7.6) wird in (8.13) präzisiert werden.

Im Fall lokalkonvexer Räume liefert jeder Satz vom ORLICZ-PETTIS-Typ Aussagen über die gleichgradig stetigen Mengen für die assoziierte OP-Topologie. Man erhält z.B.:

<u>(7.7) Korollar.</u> Sei $(E,\mathcal{R})$ lokalkonvex und separiert, $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ sei die lokalkonvex assoziierte OP-Topologie zu $\mathcal{R}$ und $E^*:=(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))'$. Dann gilt: $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) = \tau(E,E^*) = \delta(E,E^*) = \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, wobei $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ gemäß Satz (4.3) zum dualen Paar $\langle E,E^*\rangle$ gebildet ist und mit $\delta(E,E^*)$, wie schon in (4.8), die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen $\sigma(E^*,E)$-kompakten Teilmengen von E^* bezeichnet wird. Insbesondere ist also $(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ stets ein strikter MACKEY-Raum ((4.9d)).

<u>Beweis:</u> Man hat die Inklusionen: $\mathcal{OP}(\mathcal{R})\subset\tau(E,E^*)\subset\delta(E,E^*)\subset\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ und mit Satz (4.3) folgt, daß $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ und $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar bilden. ./.

<u>(7.8) Satz.</u> Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter lokalkonvexer Raum, $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ sei die lokalkonvex assoziierte OP-Topologie zu $\mathcal{R}$, $E^*:=(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))'$. Dann gilt:

(a) Die $\sigma(E^*,E)$-abgeschlossene absolutkonvexe Hülle jeder $\sigma(E^*,E)$-kompakten Teilmenge von E^* ist $\sigma(E^*,E)$-kompakt.

(b) $\sigma(E^*,E)$ und $\beta(E^*,E)$ haben die gleichen beschränkten Mengen; $\beta(E,E^*) = \beta^*(E,E^*)$.

(c) $\sigma(E,E^*)$ und $\beta(E,E^*)$ haben die gleichen beschränkten Mengen; $\beta(E^*,E) = \beta^*(E^*,E)$.

(d) $(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ ist genau dann tonneliert, wenn $(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ quasitonneliert ist.

(e) $(E^{\#}, \sigma(E^{\#},E))$ ist Folgen-vollständig. $(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ hat also stets die Eigenschaft (S) aus SAXON[114, p. 87].

Beweis:

Zu (a): Sei $B \subset E^{\#}$, B $\sigma(E^{\#},E)$-kompakt. Dann ist B^{o} eine $\delta(E,E^{\#})$-Nullumgebung. Wegen $\tau(E,E^{\#}) = \delta(E,E^{\#})$ gibt es eine abgeschlossene absolutkonvexe $\sigma(E^{\#},E)$-kompakte Menge $A \subset E^{\#}$ mit $A^{o} \subset B^{o}. \Longrightarrow B^{oo} = \overline{\Gamma(B)}^{\sigma} \subset A^{oo} = A$ nach dem Bipolaren-Satz (KÖTHE [80, p. 248]).

Zu (b): Sei $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine $\sigma(E^{\#},E)$-MACKEY-Nullfolge. Dann gibt es eine Folge $(\lambda_n; n \in \mathbb{N})$ in $\mathbb{R}^{+}$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, so daß $(\lambda_n x_n; n \in \mathbb{N})$ noch eine $\sigma(E^{\#},E)$-Nullfolge ist. Damit ist $A := \{\lambda_n x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ $\sigma(E^{\#},E)$-kompakt. Nach (a) ist dann auch $B := \overline{\Gamma(A)}^{\sigma}$ $\sigma(E^{\#},E)$-kompakt und daher nach KÖTHE[80, p. 264 (1)] auch $\beta(E^{\#},E)$-beschränkt. $(x_n; n \in \mathbb{N})$ ist also auch eine $\beta(E^{\#},E)$-MACKEY-Nullfolge. Mit KÖTHE[80, p. 386 (3)] folgt daraus, daß $\sigma(E^{\#},E)$ und $\beta(E^{\#},E)$ die gleichen beschränkten Mengen besitzen. $\beta^{*}(E,E^{\#})$ ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen $\beta(E^{\#},E)$-beschränkten Teilmengen von $E^{\#}$, also gilt $\beta^{*}(E,E^{\#}) = \beta(E,E^{\#})$.

Zu (c): Nach HORVÁTH[65, p. 210, Prop. 8] bilden die bornivoren $\sigma(E,E^{\#})$-Tonnen eine Nullumgebungsbasis für $\beta^{*}(E,E^{\#})$. Also ist $\beta^{*}(E,E^{\#})$ die feinste polare Topologie zu $\langle E,E^{\#}\rangle$, die die gleichen beschränkten Mengen wie $\sigma(E,E^{\#})$ hat. Aus $\beta(E,E^{\#}) = \beta^{*}(E,E^{\#})$ folgt daher unmittelbar die Behauptung.

Zu (d): Dies folgt unmittelbar aus (b).

Zu (e): Nach GROTHENDIECK[59, p. 286, ex. 1] ist die absolutkonvexe abgeschlossene Hülle jeder CAUCHY-Folge in einem lokalkonvexen Raum metrisierbar. (Siehe hierzu auch KALTON[71, p. 402, Corollary].) Ist $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine $\sigma(E^{\#},E)$-CAUCHY-Folge in E, so ist daher $A := \overline{\Gamma(\{x_n; n \in \mathbb{N}\})}^{\sigma}$ beschränkt und $\sigma(E^{\#},E) \cap A$ ist metrisierbar. Also ist A $\eta(E,E^{\#})$-gleichgradig stetig nach Satz (5.8a). Mit $\eta(E,E^{\#}) \subset \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ aus Satz (5.10b) folgt daher, daß A auch $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-gleichgradig stetig ist. $(A, \sigma(E^{\#},E) \cap A)$ ist somit kompakt. $\Longrightarrow$ $(x_n; n \in \mathbb{N})$ ist konvergent. ./.

Aus dem Beweis zu (7.8a) und (3.9h) ersieht man, daß jeder strikte MACKEY-Raum ein MACKEY-Folgen-vollständiges Dual besitzt.

(7.9) Korollar. Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter lokalkonvexer Raum und $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ die lokalkonvex assoziierte OP-Topologie zu $\mathcal{R}$;

$E^* := (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))'$. Dann gilt:

(a) Ist $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine TF-summierbare Folge in $(E,\mathcal{R})$, so ist $\$[x](\mathrm{Pot}(\mathbb{N}))$ beschränkt bezüglich $\beta(E,E^*)$, also insbesondere bezüglich $\beta(E,E')$.

(b) Ist $\mathfrak{A}$ ein σ-Ring und $m:\mathfrak{A}\longrightarrow(E,\mathcal{R})$ eine σ-additive Mengenfunktion, so ist $m(\mathfrak{A}) := \{m(A);\ A\in\mathfrak{A}\}$ beschränkt bezüglich $\beta(E,E^*)$, also insbesondere bezüglich $\beta(E,E')$.

Beweis:

Zu (a): Dies folgt unmittelbar aus (7.8c).

Zu (b): Da $m:\mathfrak{A}\longrightarrow(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ σ-additiv ist (Satz (6.1)), ist $m(\mathfrak{A})$ nach DUNFORD, SCHWARTZ[50, p. 127, Corollary 5] $\sigma(E,E^*)$-beschränkt. (In dem zitierten Korollar ist $\mathfrak{A}$ als σ-Algebra und E als BANACH-Raum vorausgesetzt. Man sieht jedoch, daß der Beweis die oben benötigte Aussage liefert.) Mit (7.8c) folgt nun die Behauptung. ./.

Korollar (7.9) verschärft Resultate von TWEDDLE[129, p. 487, Prop. 8] . Ist z.B. $\mathfrak{A}$ ein σ-Ring und $m:\mathfrak{A}\longrightarrow(m_0,\|\cdot\|_\infty) =: (E,\mathcal{R})$ eine σ-additive Mengenfunktion, so liefert die $\beta(E,E')$-Beschränktheit von $m(\mathfrak{A})$ nur die $\|\cdot\|_\infty$-Beschränktheit dieser Menge, denn $(m_0,\|\cdot\|_\infty)$ ist tonneliert (GROTHENDIECK[59, p. 145, ex. 8]). Aus Satz (1.24b) folgt, daß die zur $\|\cdot\|_\infty$-Topologie auf m_0 assoziierte OP-Topologie die feinste lokalkonvexe Topologie ist. Mit (7.9b) von oben folgt daher, daß $m(\mathfrak{A})$ endlich dimensional sein muß (KELLEY, NAMIOKA[77, p. 53, Problem I]).

(7.10) Korollar. Fallen in dem separierten topologischen linearen Raum (bzw. in dem separierten lokalkonvexen Raum) $(E,\mathcal{R})$ die BM-summierbaren Folgen und die TF-summierbaren Folgen zusammen, so gilt dies auch für $(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$. Für solche Räume gilt also stets $\mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}) = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$.

Aus (1.17c) entnimmt man, daß diese Vorausetzungen z.B. erfüllt sind, wenn $(E,\mathcal{R})$ lokal pseudo-konvex und Σ-vollständig ist. Wir notieren noch eine einfache Folgerung:

(7.11) Korollar. Ist $(E,\mathcal{R})$ Σ-vollständig, so gilt dies auch für $(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$. (Siehe auch (6.4).)

Das folgende einfache Beispiel wird auch in §12 nochmals verwendet werden.

(7.12) Beispiel. Sei $(E,\mathcal{R})$ ein vollständig metrisierbarer topologischer linearer Raum; q eine Pseudo-Norm auf E, die die Topologie $\mathcal{R}$ liefert. Jede Folge $(x_n;n\in\mathbb{N})$ in E, für die

$(q(x_n);n\in\mathbb{N})\in l^1$ gilt, ist offenbar BM-summierbar und daher auch TF-summierbar. In jedem unendlich dimensionalen vollständig metrisierbaren topologischen linearen Raum existieren daher unendlich dimensionale BM-summierbare Folgen. Insbesondere kann also für einen solchen Raum die assoziierte BM$\mathcal{OP}$-Topologie nicht mit der feinsten lokalkonvexen Topologie bzw. der feinsten linearen Topologie zusammenfallen.

In Satz (10.21) werden wir sehen, daß das folgende Beispiel (7.13a) für TF-summierbare Folgen in lokalkonvexen Räumen besondere Bedeutung hat.

<u>(7.13) Beispiele.</u>
(a) $E:=m_o$, $\mathcal{R}:=\sigma(m_o,l^1)$. Jedes Element $x\in m_o$ ist $\mathcal{R}$-Summe seiner Komponenten, $x=\sum_{n\in\mathbb{N}}x(n)\cdot e_n$ (bezüglich $\mathcal{R}$). Da die Folge $(x(n)\cdot e_n;n\in\mathbb{N})$ für jedes $x\in m_o$ $\mathcal{R}$-TF-summierbar ist, ist diese Folge auch $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-TF-summierbar. Für jedes $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-stetige lineare Funktional x' auf m_o gilt daher $\langle x',x\rangle=\langle x',\sum_{n\in\mathbb{N}}x(n)\cdot e_n\rangle=$ $=\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x',x(n)\cdot e_n\rangle$ für alle $x\in m_o$. Da die rechts stehende Summe unbedingt konvergent ist, folgt insbesondere $\sum_{n\in\mathbb{N}}|x(n)|\,|\langle x',e_n\rangle|<\infty$ für alle $x\in m_o$, $x'\in(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))'.\Longrightarrow\sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle x',e_n\rangle|<\infty$ für alle $x'\in(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))'.\Longrightarrow(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))'=:E^{\#}$ kann mit l^1 identifiziert werden. Man erhält also $\mathcal{OP}(\sigma(m_o,l^1))=\tau(m_o,l^1)=\delta(m_o,l^1)$.

In (4.6a) hatten wir festgestellt, daß $(m_o,\tau(m_o,l^1))$ nicht tonneliert ist; die assoziierte OP-Topologie ist also i.a. nicht tonneliert.
(b) Die Ergebnisse aus (a) können wie folgt verallgemeinert werden: Sei $\Lambda\subset\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ein Folgenraum mit $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\subset\Lambda$ und $\Lambda^{\alpha}:=\{y\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}};\sum_{i\in\mathbb{N}}|x_i\cdot y_i|<\infty$ für alle $x\in\Lambda\}$ das KÖTHE'sche α-Dual von Λ (KÖTHE[80, p. 408 ff.]). e_n sei der n-te Einheitsvektor in $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\subset\Lambda$. Für jedes $x\in\Lambda$ ist dann die Folge $(x_n\cdot e_n;n\in\mathbb{N})$ $\sigma(\Lambda,\Lambda^{\alpha})$-summierbar zur Summe x. Wir setzen nun zusätzlich voraus, daß für jedes $x\in\Lambda$ die Folge $(x_n\cdot e_n;n\in\mathbb{N})$ sogar $\sigma(\Lambda,\Lambda^{\alpha})$-TF-summierbar ist. Dann zeigt man wie unter (a), daß $\mathcal{OP}(\sigma(\Lambda,\Lambda^{\alpha}))=\tau(\Lambda,\Lambda^{\alpha})=\delta(\Lambda,\Lambda^{\alpha})$ gilt.

Obige Voraussetzungen sind z.B. immer dann erfüllt, wenn Λ normal ist, d.h. mit $(x_i;i\in\mathbb{N})=x$ auch alle Folgen $z=(z_i;i\in\mathbb{N})$ mit $|z_i|\leq|x_i|$ $(i\in\mathbb{N})$ enthält. m_o ist nicht normal; trotzdem sind obige Voraussetzungen erfüllt.

<u>(7.14) Beispiel.</u> Aus Satz (1.24a) erhält man unmittelbar

$BM\mathcal{OP}(\sigma(m_o,l^1)) = \tau(m_o,m_o^*)$, d.h. $BM\mathcal{OP}(\sigma(m_o,l^1))$ ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf m_o. Mit (7.13a) von oben zeigt dies, daß die Bildungen von $BM\mathcal{OP}$ und $\mathcal{OP}$ echt verschieden sind. Satz (1.24b) zeigt, wie schon im Anschluß an Korollar (7.9) erwähnt wurde, daß für $(E,\mathcal{R}) := (m_o,\|\cdot\|_\infty)$ auch $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) = \tau(m_o,m_o^*)$ gilt. D.h. die zur $\|\cdot\|_\infty$-Topologie auf m_o assoziierte OP-Topologie ist die feinste lokalkonvexe Topologie.

<u>(7.15) Beispiel.</u> $(l^\infty,\sigma(l^\infty,l^1))$ ist als schwaches Dual des tonnelierten Raumes $(l^1,\|\cdot\|_1)$ quasi-vollständig, also insbesondere Σ-vollständig. Aus (7.10) folgt daher mit (7.13b), daß $\mathcal{OP}(\sigma(l^\infty,l^1)) = BM\mathcal{OP}(\sigma(l^\infty,l^1)) = \tau(l^\infty,l^1)$ gilt.

<u>(7.16) Beispiel.</u> Mit Beispiel (5.11) erhält man: Ist $(E,\mathcal{R})$ ein abzählbar dimensionaler separierter lokalkonvexer Raum, so ist $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) = \tau(E,E^*)$; also gilt insbesondere $BM\mathcal{OP}(\mathcal{R}) = \tau(E,E^*)$. Das gleiche Ergebnis erhält man für topologische lineare Räume, zu denen eine gröbere separierte lokalkonvexe Topologie existert.

Bei BUCCHIONI, GOLDMAN[29, p. 17 ff.] wird zu verschiedenen Topologien auf $C(T)$ (T vollständig regulär) die lokalkonvex assoziierte OP-Topologie berechnet.

§ 8 Darstellung der assoziierten CP-Topologie als verallgemeinerter induktiver Limes.

(8.1) Notation. Ist $(E,\mathcal{R})$ eine kommutative separierte topologische Gruppe, so setzen wir:

$\mathcal{K}(E,\mathcal{R}) := \{ \overline{\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))}^{\mathcal{R}};\ x := (x_n; n\in\mathbb{N})$ ist eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge in $E\}$.

Ist $(E,\mathcal{R})$ ein separierter topologischer linearer Raum, so setzen wir:

$\mathcal{C}(E,\mathcal{R}) := \{ \overline{\{\sum_{n\in\sigma} a_n x_n;\ |a_n| \leq 1\ \ (n\in\sigma),\ \sigma\in\mathcal{F}(\mathbb{N})\}}^{\mathcal{R}};\ (x_n; n\in\mathbb{N})$ ist eine BM-summierbare Folge in $(E,\mathcal{R})\}$.

Nach (2.6) besteht $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ aus stetigen separierten Bildern von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, d.h. jedes $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ ist in seiner Relativtopologie ein kompakter metrischer Raum. Mit dem Beweis zu (1.21) und Lemma 1.2 aus KALTON[71, p. 401] folgt, daß für separierte topologische lineare Räume $(E,\mathcal{R})$ auch jedes $K\in\mathcal{C}(E,\mathcal{R})$ als stetiges separiertes Bild eines kompakten metrischen Raumes in seiner Relativtopologie ein kompakter metrischer Raum ist. Weiterhin gilt $0\in K$ für alle $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ bzw. $K\in\mathcal{C}(E,\mathcal{R})$.

(8.2) Lemma. Seien $(E,\mathcal{R})$ und $(F,\mathcal{Z})$ kommutative separierte topologische Gruppen; $T: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{Z})$ sei ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann gilt $T(\mathcal{K}(E,\mathcal{R})) \subset \mathcal{K}(F,\mathcal{Z})$.

Beweis: Zu $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ gibt es eine TF-summierbare Folge $(x_n; n\in\mathbb{N})$ in $(E,\mathcal{R})$ mit $K = \overline{\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))}$. Mit der Stetigkeit des Homomorphismus T erhält man: $T(\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))) \subset T(\overline{\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))})$ $= T(K) \subset \overline{T(\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N})))} = \overline{\$[T(x)](\mathcal{F}(\mathbb{N}))} =: K_1 \in \mathcal{K}(F,\mathcal{Z})$. (Mit $T(x)$ haben wir dabei die Folge $(T(x_n); n\in\mathbb{N})$ bezeichnet.) K ist kompakt und $\mathcal{Z}$ ist separiert, also ist $T(K)$ $\mathcal{Z}$-abgeschlossen. Damit erhält man $T(K) = K_1$. ./.

(8.3) Satz. Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter topologischer linearer Raum, und $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ sei wie in (8.1) erklärt. Unter allen linearen Topologien $\mathcal{T}$ auf E mit $\mathcal{T}\cap K \subset \mathcal{R}\cap K$ für alle $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ gibt es eine feinste, und diese stimmt mit $\mathcal{CP}(\mathcal{R})$ überein.

Beweis: Sei $\mathfrak{M} := \{\mathcal{T};\ \mathcal{T}$ eine lineare Topologie auf E mit $\mathcal{T}\cap K \subset \mathcal{R}\cap K$ für alle $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})\}$. $\mathcal{G} := \bigvee\mathfrak{M}$ ist eine separierte lineare Topologie auf E und es gilt $\mathcal{G}\supset\mathcal{R}$, also auch $\mathcal{G}\cap K \supset \mathcal{R}\cap K$ für alle $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Eine Subbasis für $\mathcal{G}$ ist ge-

geben durch $\mathcal{B} := \bigcup (\mathcal{T}; \mathcal{T} \in \mathfrak{M})$. Zu $V \in \mathcal{B}$ existiert $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$ mit $V \in \mathcal{T}$. Damit gilt $V \cap K \in \mathcal{T} \cap K \subset \mathcal{R} \cap K$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ und man erhält $\mathcal{G} \cap K \subset \mathcal{R} \cap K$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$, da $\mathcal{B}$ eine Subbasis von $\mathcal{G}$ ist (vgl. auch ROELCKE[108, p. 92]). Es folgt $\mathcal{G} = (\bigvee \mathfrak{M}) \in \mathfrak{M}$. Bei der Supremumsbildung kann man sich offenbar auf lineare Topologien $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$ beschränken. Für diese Topologien ist aber "$\mathcal{T} \cap K \subset \mathcal{R} \cap K$" zu "$\mathcal{T} \cap K = \mathcal{R} \cap K$" äquivalent und mit Satz (6.1) erhält man wie beim Beweis zu Satz (7.1) die Beziehung $\mathcal{G} = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$. ./.

<u>(8.4) Bemerkungen.</u>

(a) Ein entsprechender Satz gilt für lokalkonvexe Räume und für kommutative topologische Gruppen. Ebenso kann man für topologische lineare Räume einen entsprechenden Satz mit "BM-summierbar" statt "TF-summierbar" und $\mathcal{C}(E,\mathcal{R})$ an Stelle von $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ beweisen (vgl. dazu (1.21)).

(b) Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis zu Satz (8.3) gilt: $\mathcal{T} \cap K \subset \mathcal{R} \cap K \iff \mathrm{id}_K : (K, \mathcal{R} \cap K) \hookrightarrow (E, \mathcal{T})$ ist stetig. Aus (8.3) folgt daher, daß $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ eine verallgemeinerte induktive Limes-Topologie im Sinne von GARLING[52] bzw. IYAHEN, POPOOLA[67] ist. Ebenso kann man $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ als die im Sinne von BUCHWALTER[30, p. 20] zu der von $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ erzeugten Kompaktologie gehörige Topologie auffassen. Die Ergebnisse aus diesen Arbeiten sind jedoch nicht direkt anwendbar, da die Mengen aus $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ i.a. nicht einmal kreisförmig sind. Trotzdem wurden natürlich einige der nachfolgenden Untersuchungen durch die Aussagen von GARLING[52] und BUCHWALter[30] angeregt.

<u>(8.5) Korollar.</u> Für jede kommutative separierte topologische Gruppe (jeden separierten topologischen linearen Raum, jeden separierten lokalkonvexen Raum) $(E,\mathcal{R})$ ist $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ die feinste Gruppentopologie (lineare Topologie, lokalkonvexe Topologie) auf E, die auf allen Mengen $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ mit $\mathcal{R}$ übereinstimmt. Weiterhin gilt $\mathcal{K}(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R})) = \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$.

<u>Beweis:</u> Bis auf die letze Gleichung kann man diese Aussagen unmittelbar aus dem Beweis zu Satz (8.3) entnehmen.

Aus (8.2) und $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{R}$ folgt zunächst $\mathcal{K}(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R})) \subset \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Sei $K = \overline{\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))}^{\mathcal{R}} \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Aus $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{R}$ folgt $\overline{\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))}^{\mathcal{OP}(\mathcal{R})} \subset K$. $\overline{\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))}^{\mathcal{OP}(\mathcal{R})}$ ist $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-kompakt, also auch $\mathcal{R}$-kompakt und damit $\mathcal{R}$-abgeschlossen, da $\mathcal{R}$ separiert ist. Man

erhält: $K = \overline{\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))}^{\mathcal{R}} \subset \overline{\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))}^{\mathcal{OP}(\mathcal{R})} \subset K$, also $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$. ./.

Im Zusammenhang mit (8.3) und (8.5) vergleiche man auch die Begriffe "compactly determined" aus PORTA[99] und "lokaltopologisch" aus ADASCH[2].

<u>(8.6) Definition.</u> Seien $(E,\mathcal{R})$ und $(F,\mathcal{Z})$ kommutative separierte topologische Gruppen. $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ sei wie in (8.1) erklärt und $T: E \longrightarrow F$ sei ein Gruppenhomomorphismus.

(a) T heißt $\mathcal{OP}$-stetig, wenn $T|K: (K,\mathcal{R} \cap K) \longrightarrow (F,\mathcal{Z})$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ stetig ist.

(b) T heißt Σ-stetig, wenn für jede $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge $(x_n;n\in\mathbb{N})$ in E die Bildfolge $(T(x_n);n\in\mathbb{N})$ in $(F,\mathcal{Z})$ summierbar (und damit TF-summierbar) ist und $T(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} T(x_n)$ gilt.

Abbildungen mit der Eigenschaft (b) heißen bei BENNETT, KALTON [18, p. 819] "subcontinuous".

<u>(8.7) Satz.</u> Seien $(E,\mathcal{R})$ und $(F,\mathcal{Z})$ kommutative separierte topologische Gruppen, und $T: E \longrightarrow F$ sei ein Gruppenhomomorphismus. $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ sei wie in (8.1) erklärt. Dann sind äquivalent:

(a) T ist $\mathcal{OP}$-stetig.

(b) T ist Σ-stetig.

<u>Beweis:</u>

<u>(a) $\Longrightarrow$ (b):</u> Sei $(x_n;n\in\mathbb{N}) =: x$ eine TF-summierbare Folge in $(E,\mathcal{R})$; $A := \$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N}))$. Dann ist $K := \overline{A}^{\mathcal{R}} \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Nach Voraussetzung ist $T|K$ stetig, also gilt $T(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} T(x_n)$.

<u>(b) $\Longrightarrow$ (a):</u> Sei $x := (x_n;n\in\mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge in E; A und K seien wie oben erklärt. Es ist die Stetigkeit von $T|K: (K,\mathcal{R} \cap K) \longrightarrow (F,\mathcal{Z})$ zu zeigen. Sei dazu $\mathcal{T}$ die Initialtopologie bezüglich $T: E \longrightarrow (F,\mathcal{Z})$ und $id_E: E \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ auf E, d.h. $\mathcal{T} = T^{-1}(\mathcal{Z}) \vee \mathcal{R}$. Da $(x_n;n\in\mathbb{N})$ $\mathcal{R}$-TF-summierbar ist und T Σ-stetig ist, ist $(T(x_n);n\in\mathbb{N})$ $\mathcal{Z}$-TF-summierbar. $(x_n;n\in\mathbb{N})$ ist deshalb auch $\mathcal{T}$-TF-summierbar. Nach (1.8) ist $K_1 := \overline{A}^{\mathcal{T}}$ $\mathcal{T}$-kompakt, also auch $\mathcal{R}$-kompakt und wegen der Separiertheit von $\mathcal{R}$ auch $\mathcal{R}$-abgeschlossen. Man erhält daraus $K = \overline{A}^{\mathcal{R}} \subset K_1 \subset K$, d.h. $K_1 = K. \Longrightarrow (K,\mathcal{R} \cap K) = (K,\mathcal{T} \cap K)$, da $\mathcal{T} \cap K$ nicht echt feiner als $\mathcal{R} \cap K$ sein kann. Mit der Stetigkeit von $T: (E,\mathcal{T}) \longrightarrow (F,\mathcal{Z})$ folgt daher die Stetigkeit von $T|K: (K,\mathcal{R} \cap K) \longrightarrow (F,\mathcal{Z})$. ./.

Der Beweis zeigt, daß man die Äquivalenz für jede TF-summierbare Folge und das zugehörige K einzeln beweisen kann.

(8.8) Definition. Eine kommutative separierte topologische Gruppe $(E,\mathcal{R})$ hat die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$, wenn gilt:

Ist $(F,\mathcal{F})$ eine beliebige kommutative separierte topologische Gruppe und $T: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ ein $\mathcal{OP}$-stetiger Homomorphismus, so ist T bereits stetig.

Für topologische lineare Räume und für lokalkonvexe Räume wird die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$ entsprechend definiert. Für $(F,\mathcal{F})$ sind dann nur topologische lineare Räume bzw. nur lokalkonvexe Räume und für T nur lineare Abbildungen zugelassen.

Man vergleiche hierzu auch die Definition von "bornologisch" im Fall lokalkonvexer Räume.

Offenbar hat die feinste Topologie der jeweiligen Kategorie stets die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$.

(8.9) Satz. Der separierte topologische lineare Raum $(E,\mathcal{R})$ trage die lineare Finaltopologie bezüglich einer Familie $((E_\iota,\mathcal{R}_\iota);\iota\in I)$ von separierten topologischen linearen Räumen und linearen Abbildungen $T_\iota:(E_\iota,\mathcal{R}_\iota)\longrightarrow E$ $(\iota\in I)$. Dann gilt:
Besitzen alle Räume $(E_\iota,\mathcal{R}_\iota)$ $(\iota\in I)$ die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$, so besitzt auch $(E,\mathcal{R})$ die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$.

Beweis: Sei $T: (E,\mathcal{R})\longrightarrow(F,\mathcal{F})$ linear und $\mathcal{OP}$-stetig. Da $(E,\mathcal{R})$ die lineare Finaltopologie bezüglich $T_\iota:(E_\iota,\mathcal{R}_\iota)\longrightarrow E$ $(\iota\in I)$ trägt und jeder Raum $(E_\iota,\mathcal{R}_\iota)$ die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$ besitzt, genügt es zu zeigen, daß $T\circ T_\iota:(E_\iota,\mathcal{R}_\iota)\longrightarrow(F,\mathcal{F})$ für alle $\iota\in I$ $(\mathcal{OP})$-stetig ist. Sei dazu $K\in\mathcal{K}(E_\iota,\mathcal{R}_\iota)$. $T_\iota:(E_\iota,\mathcal{R}_\iota)\longrightarrow(E,\mathcal{R})$ ist stetig und linear, also gilt $T_\iota(K) =: K_1\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ nach (8.2).
$\Longrightarrow$ $T|K_1: (K_1,\mathcal{R}\cap K_1)\longrightarrow(F,\mathcal{F})$ ist stetig. $\Longrightarrow$
$T\circ T_\iota|K : (K,\mathcal{R}_\iota\cap K)\longrightarrow(F,\mathcal{F})$ ist stetig für alle $K\in\mathcal{K}(E_\iota,\mathcal{R}_\iota)$ und alle $\iota\in I$. $\Longrightarrow$ $T\circ T_\iota : (E_\iota,\mathcal{R}_\iota)\longrightarrow(F,\mathcal{F})$ ist $(\mathcal{OP})$-stetig für alle $\iota\in I$. $\Longrightarrow$ T ist stetig, d.h. der Raum $(E,\mathcal{R})$ hat die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$. ./.

Entsprechende Aussagen erhält man offenbar für kommutative separierte topologische Gruppen und für separierte lokalkonvexe Räume. Mit geringfügigen Modifikationen kann man diese Betrachtungen auch auf den nicht separierten Fall ausdehnen. Dies wird jedoch hier nicht benötigt.

(8.10) Satz. Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter topologischer linearer Raum. Unter allen linearen Topologien $\mathcal{F}\supset\mathcal{R}$ auf E, die die Ei-

genschaft $(\mathcal{OP})$ besitzen, gibt es eine gröbste und diese stimmt mit $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ überein.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathfrak{N} := \{\mathcal{F}\ ;\ \mathcal{F}$ ist eine lineare Topologie auf E, $\mathcal{F} \supset \mathcal{R}$, $(E,\mathcal{F})$ hat die Eigenschaft $(\mathcal{OP})\}$. Die lineare untere Grenze $\mathcal{T} := \bigwedge^{lin} \mathfrak{N}$ ist die lineare Finaltopologie auf E bezüglich $id_E: (E,\mathcal{F}) \longrightarrow E$ $(\mathcal{F} \in \mathfrak{N})$. Mit (8.9) folgt unmittelbar $\mathcal{T} \in \mathfrak{N}$, womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist. Es bleibt $\mathcal{T} = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ zu zeigen.

<u>(a) $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ hat die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$:</u>

Nach (8.5) gilt $\mathcal{K}(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R})) = \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Sei $T: E \longrightarrow F$ linear und $T|K: (K,\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \cap K) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ sei stetig für alle K aus $\mathcal{K}(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$. Mit $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \cap K = \mathcal{R} \cap K$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ folgt: $T|K: (K,\mathcal{R} \cap K) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ ist stetig für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. $\Longrightarrow$ $T^{-1}(\mathcal{F}) \cap K = (T|K)^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{R} \cap K = \mathcal{OP}(\mathcal{R}) \cap K$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Mit (8.3) folgt daraus $T^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{OP}(\mathcal{R})$, d.h. $T:(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ ist stetig. Also hat $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$.

Wegen $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{R}$ folgt $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \in \mathfrak{N}$ und damit $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{T}$.

<u>(b) $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{T}$:</u>

Da $\mathcal{T}$ die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$ besitzt, genügt es zu zeigen: $id_K: (K,\mathcal{T} \cap K) \longrightarrow (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ ist stetig für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{T})$. $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{T} \supset \mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{K}(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R})) \subset \mathcal{K}(E,\mathcal{T}) \subset \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ nach (8.2). Mit (8.5) folgt $\mathcal{K}(E,\mathcal{T}) = \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Aus $\mathcal{T} \cap K \supset \mathcal{R} \cap K = \mathcal{OP}(\mathcal{R}) \cap K$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ folgt daher die Stetigkeit von $id_E: (E,\mathcal{T}) \longrightarrow (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$, d.h. $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{T}$. ./.

Die entsprechende Aussage für kommutative separierte topologische Gruppen bzw. für separierte lokalkonvexe Räume beweist man analog.

<u>(8.11) Korollar.</u> Ist $((E_\iota,\mathcal{R}_\iota);\iota \in I)$ eine Familie separierter topologischer linearer Räume, so gilt $\coprod_{\iota \in I} \mathcal{OP}(\mathcal{R}_\iota) \supset \mathcal{OP}(\coprod_{\iota \in I} \mathcal{R}_\iota)$, wobei sich sowohl die Bildung der direkten Summe $\coprod_{\iota \in I}$, als auch die Bildung von $\mathcal{OP}$ auf die Kategorie der topologischen linearen Räume bezieht. Eine entsprechende Aussage gilt für kommutative separierte topologische Gruppen und für separierte lokalkonvexe Räume.

<u>Beweis:</u> $(\coprod_{\iota \in I} E_\iota, \coprod_{\iota \in I} \mathcal{OP}(\mathcal{R}_\iota))$ hat als Finalbildung über Räume mit der Eigenschaft $(\mathcal{OP})$ selbst die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$, daher ist $\coprod_{\iota \in I} \mathcal{OP}(\mathcal{R}_\iota)$ feiner als $\mathcal{OP}(\coprod_{\iota \in I} \mathcal{R}_\iota)$. ./.

Man kann (8.11) auch direkt mit der in Satz (7.1) festgestellten funktoriellen Eigenschaft der OP-Topologie beweisen.

Mit (7.6) erhält man:

<u>(8.12) Korollar.</u> Ist I endlich, so gilt: $\prod_{\iota\in I} \mathcal{OP}(\mathcal{R}_\iota) = \mathcal{OP}(\prod_{\iota\in I} \mathcal{R}_\iota) = \mathcal{OP}(\coprod_{\iota\in I} \mathcal{R}_\iota) = \coprod_{\iota\in I} \mathcal{OP}(\mathcal{R}_\iota)$.

<u>(8.13) Bemerkungen.</u>

(a) Mit S. DIEROLF[37, p. 35, Satz 4b] erhält man für topologische lineare Räume bzw. für lokalkonvexe Räume und jede Indexmenge I die Vertauschbarkeit $\coprod_{\iota\in I} \mathcal{OP}(\mathcal{R}_\iota) = \mathcal{OP}(\coprod_{\iota\in I} \mathcal{R}_\iota)$.

(b)* Existiert auf I kein ULAM-Maß, so ist $\mathbb{K}^I$ ultrabornologisch (KELLEY, NAMIOKA[77, p. 187]). In §12 werden wir zeigen, daß jeder ultrabornologische lokalkonvexe Raum seine OP-Topologie trägt. Mit S. DIEROLF[37, p. 32, Satz 2] folgt daher $\prod_{\iota\in I} \mathcal{OP}(\mathcal{R}_\iota) = \mathcal{OP}(\prod_{\iota\in I} \mathcal{R}_\iota)$.

(c) Bei PFISTER[97, p. 28] wird gezeigt:

Auf I existiere kein ULAM-Maß und es gelte die schwache Kontinuumshypothese. Dann ist $\mathbb{R}^I$ der lineare induktive Limes eines strikten gerichteten Systems von Räumen, die zu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ topologisch isomorph sind.

In (11.9b) werden wir sehen, daß $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (versehen mit der Produkttopologie) als vollständig metrisierbarer topologischer linearer Raum auch seine linear assoziierte OP-Topologie trägt. Mit (8.9) und dem bereits in (b) zitierten Satz 2 aus [37] erhält man also, daß die Vertauschbarkeit $\prod_{\iota\in I} \mathcal{OP}(\mathcal{R}_\iota) = \mathcal{OP}(\prod_{\iota\in I} \mathcal{R}_\iota)$ auch in der Kategorie der topologischen linearen Räume gilt, sofern auf I kein ULAM-Maß existiert und die schwache Kontinuumshypothese gilt.

(d) Existiert dagegen auf I ein ULAM-Maß, so ist $\mathbb{K}^I$ nicht bornologisch (KELLEY, NAMIOKA[77, p. 187]). Jeder abgeschlossene lineare Teilraum von $\mathbb{K}^I$ ist nach BOURBAKI[26, p. 102] topologisch isomorph zu $\mathbb{K}^J$ für ein geeignetes J. Daher ist jeder abgeschlossene separable lineare Teilraum von $\mathbb{K}^I$ topologisch isomorph zu $\mathbb{K}^J$ mit $\mathrm{card}(J) \leq \mathrm{card}(\mathbb{R})$ (DUGUNDJI[48, p. 175, Th. 7.2]) und deshalb bornologisch (GILLMAN, JERISON[55, p. 164, Th. 12.5]). Die lokalkonvex assoziierte bornologische Topologie $\mathcal{Z}$ zur Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{K}^I$ ist somit echt feiner als $\mathcal{T}$ und stimmt auf allen abgeschlossenen separablen linearen Teilräumen mit $\mathcal{T}$ überein. Jede Folge in $\mathbb{K}^I$ liegt in einem solchen separablen abgeschlossenen linearen Teilraum von $\mathbb{K}^I$. Daher haben $\mathcal{T}$ und $\mathcal{Z}$ die gleichen TF-summierbaren Folgen. Mit der natürlichen Topologie $\mathcal{R}$ auf $\mathbb{K}$ gilt also $\prod_{\iota\in I} \mathcal{OP}(\mathcal{R}) = \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{Z} \subset \mathcal{OP}(\prod_{\iota\in I} \mathcal{R})$

im lokalkonvexen Sinn. Da $\mathfrak{R} = \mathcal{OP}(\mathfrak{R})$ auch in der Kategorie der kommutativen topologischen Gruppen gilt, gilt die Ungleichung $\prod_{\iota\in I} \mathcal{OP}(\mathfrak{R}) \subsetneqq \mathcal{OP}(\prod_{\iota\in I} \mathfrak{R})$ auch im Sinne topologischer linearer Räume und im Sinne von kommutativen topologischen Gruppen. ✱

(e) Für lokalkonvexe Räume werden obige Vertauschbarkeiten unabhängig und mit anderen Methoden bei BUCCHIONI, GOLDMAN[29, p. 21/22, Th. (6.2) u. Th. (6.4)] bewiesen.

§ 9 Lokalisierung der assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie.

In der Kategorie der lokalkonvexen Räume kann man eine Nullumgebungsbasis für $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ leicht angeben:

(9.1) Satz. Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter lokalkonvexer Raum. Eine Nullumgebungsbasis für $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ (gebildet in der Kategorie der lokalkonvexen Räume) ist dann gegeben durch:

$\mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R})) := \{U \subset E;\ U$ absolutkonvex und zu jeder TF-summierbaren Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in $(E,\mathcal{R})$ mit Summe s gibt es ein $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit: $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}), \tau \supset \sigma \Longrightarrow \sum_{n\in\tau} x_n \in s + U\}$.

Beweis: Jedes $U \in \mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ ist absorbant: Für jedes $x \in E$ ist $(2^{-n}\cdot x; n \in \mathbb{N})$ TF-summierbar zur Summe x. Es gibt daher ein $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit $(\sum_{n\in\sigma} 2^{-n}\cdot x) \in x + U$. Ist $m := \max\sigma$, so gilt $x \in 2^m U$, da U kreisförmig ist.
Ist $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine TF-summierbare Folge in $(E,\mathcal{R})$ mit Summe s, so ist für jedes $\rho > 0$ $(\rho^{-1}\cdot x_n; n \in \mathbb{N})$ eine TF-summierbare Folge in $(E,\mathcal{R})$ mit Summe $\rho^{-1}\cdot s$. Daraus folgt: Ist $U \in \mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ und $\rho > 0$, so gilt auch $\rho U \in \mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$. Man sieht unmittelbar, daß mit $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ gilt. Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ Nullumgebungsbasis für eine lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}$ auf E ist (ROELCKE[108, p. 5]). Ist $U \in \mathcal{U}_o(\mathcal{R})$ absolutkonvex, so gilt offenbar $U \in \mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$; man hat daher $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$. Jede $\mathcal{T}$-TF-summierbare Folge in E ist also auch $\mathcal{R}$-TF-summierbar. Sei nun $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge in E mit Summe s.
Beh.: $(x_n; n \in \mathbb{N})$ ist auch $\mathcal{T}$-TF-summierbar.
Bew.: Es genügt zu zeigen, daß die Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ selbst summierbar ist, denn auf jede Teilfolge kann man die gleiche Argumentation anwenden.
Sei $U \in \mathcal{U}_o(\mathcal{T})$, o.E. $U \in \mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$, da $\mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ eine Basis von $\mathcal{U}_o(\mathcal{T})$ ist. Dann gibt es ein $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit der Eigenschaft: $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}), \tau \supset \sigma \Longrightarrow \sum_{n\in\tau} x_n \in s + U$. Daher ist $(x_n; n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{T}$-summierbar zur Summe s.
Die Topologien $\mathcal{R}$ und $\mathcal{T}$ haben also die gleichen TF-summierbaren Folgen.

Ist $\mathcal{Z}$ irgendeine lokalkonvexe Topologie auf E, die die gleichen TF-summierbaren Folgen wie $\mathcal{R}$ besitzt, so entnimmt man der Definition von $\mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$, daß jede absolutkonvexe $\mathcal{Z}$-Nullumgebung bereits in $\mathcal{B}_c(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ liegt, d.h. es gilt $\mathcal{Z} \subset \mathcal{T}$.
Da $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ die feinste lokalkonvexe Topologie auf E ist, die die

gleichen TF-summierbaren Folgen wie $\mathcal{R}$ besitzt, folgt $\mathcal{T} = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$. ./.

(9.2) Bemerkungen.

(a) Eine ähnliche Konstruktion wird bei KISYŃSKI[78, p. 209] und bei WEBB[134, p. 342] zur Beschreibung der assoziierten Folgentopologie verwendet. Man vergleiche dazu auch die Beschreibung einer Nullumgebungsbasis für die assoziierte bornologische Topologie bei KÖTHE[80, p. 383].

(b) In Satz (9.1) ist es offenbar unerheblich, daß nur TF-summierbare Folgen betrachtet wurden. Man könnte genauso Familien (mit oder ohne Mächtigkeitsschranke für die Indexmenge) betrachten.

(c) In Satz (9.1) und in dem folgenden Satz (9.3) kann man auch wieder "TF-summierbar" durch "BM-summierbar" ersetzen und erhält dann eine Nullumgebungsbasis für $BM\mathcal{OP}(\mathcal{R})$.

Die entsprechende Beschreibung einer Nullumgebungsbasis für $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ in der Kategorie der topologischen linearen Räume ist etwas aufwendiger:

(9.3) Satz. Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter topologischer linearer Raum. Eine Nullumgebungsbasis für $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ (gebildet in der Kategorie der topologischen linearen Räume) ist dann gegeben durch:

$\mathcal{B}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R})) := \{U \subset E;$ U kreisförmig. Es gibt eine Folge $(U_m; m \in \mathbb{N})$ kreisförmiger Mengen in E mit $U_1 \subset U$, $U_{m+1} + U_{m+1} \subset U_m$ $(m \in \mathbb{N})$, und zu jedem $m \in \mathbb{N}$ und jeder TF-summierbaren Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in $(E,\mathcal{R})$ mit Summe s gibt es ein $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit der Eigenschaft: $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}), \tau \supset \sigma \Longrightarrow \sum_{n \in \tau} x_n \in s + U_m\}$.

Beweis: Wie beim Beweis zu Satz (9.1) zeigt man, daß die Mengen U_m $(m \in \mathbb{N})$ absorbant sind. Insbesondere besteht also $\mathcal{B}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ aus kreisförmigen absorbanten Mengen.

Seien jetzt $U,V \in \mathcal{B}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ und $(U_m; m \in \mathbb{N})$, $(V_m; m \in \mathbb{N})$ die dazu existierenden Folgen aus der Definition von $\mathcal{B}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$. Wir wollen zeigen, daß $W := U \cap V$ wieder in $\mathcal{B}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ liegt und weisen dazu nach, daß die durch $W_m := U_m \cap V_m$ $(m \in \mathbb{N})$ definierte Folge die Bedingungen aus der Definition von $\mathcal{B}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ erfüllt. $W_1 \subset W$ ist unmittelbar zu sehen. Ebenso sieht man, daß $W_{m+1} + W_{m+1} \subset W_m$ $(m \in \mathbb{N})$ erfüllt ist. W_m ist als Durchschnitt kreisförmiger Mengen kreisförmig $(m \in \mathbb{N})$. Sei jetzt $m \in \mathbb{N}$ und $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine TF-summierbare Folge in $(E,\mathcal{R})$. Dann gibt es $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit der Eigenschaft: $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}), \tau \supset \sigma_1 \Longrightarrow$

$\sum_{n\in\tau} x_n - s \in U_m$; $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $\tau \supset \sigma_2 \Longrightarrow \sum_{n\in\tau} x_n - s \in V_m$. Mit $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$ gilt dann: $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}), \tau \supset \sigma \Longrightarrow \sum_{n\in\tau} x_n - s \in U_m \cap V_m$. Es folgt $W \in \mathcal{G}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$. $\mathcal{G}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ ist also eine Filterbasis. Ist $U \in \mathcal{G}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ und $(U_m; m \in \mathbb{N})$ eine dazu existierende Folge kreisförmiger Mengen mit den genannten Eigenschaften, so gilt offenbar $U_m \in \mathcal{G}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere hat man daher: Zu $U \in \mathcal{G}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ existiert $V \in \mathcal{G}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ mit $V + V \subset U$. Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{G}_1(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ Nullumgebungsbasis für eine lineare Topologie $\mathcal{T}$ auf E ist (vgl. ROELCKE[107, p. 33]). Wie im Beweis zu Satz (9.1) zeigt man nun, daß $\mathcal{T} = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ gilt. ./.

<u>(9.4) Bemerkung.</u> Nach dem Vorbild von Satz (9.3) kann man nun leicht den entsprechenden Satz für kommutative separierte topologische Gruppen formulieren und beweisen. Wir führen das nicht mehr durch.

Mit der in §8 bewiesenen Darstellbarkeit von $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ als verallgemeinerte induktive Limes-Topologie wollen wir nun den Nullumgebungsfilter von $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ durch seine Spuren auf den Mengen $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ charakterisieren. Dazu sind einige Vorbereitungen nötig.

<u>(9.5) Definition.</u> Für zwei Familien $(x_\iota; \iota \in I)$, $(y_\kappa; \kappa \in K)$ definieren wir die vereinigte Familie $(z_\lambda; \lambda \in L)$ durch: $L := I \dot\cup K$ (punktfremde Vereinigung), $z_\lambda := x_\lambda$ $(\lambda \in I)$, $z_\lambda := y_\lambda$ $(\lambda \in K)$. Zur Abkürzung schreiben wir dafür $z = x \vee y$.

Sind $(x_\iota; \iota \in I)$ und $(y_\kappa; \kappa \in K)$ Familien in einer kommutativen separierten topologischen Gruppe $(E,\mathcal{R})$, so ist $z = x \vee y$ offenbar genau dann TF-summierbar in $(E,\mathcal{R})$, wenn $(x_\iota; \iota \in I)$ und $(y_\kappa; \kappa \in K)$ $\mathcal{R}$-TF-summierbar sind. Für jede Teilmenge J von $L := I \dot\cup K$ gilt: $\$[z](J) = \$[x](J \cap I) + \$[y](J \cap K)$ (vgl. BOURBAKI [23, p. 65]). Aus dieser Formel erhält man: $\$[z](\mathrm{Pot}(L)) = \$[x](\mathrm{Pot}(I)) + \$[y](\mathrm{Pot}(K))$. Insbesondere gilt daher : $\$[x](\mathrm{Pot}(I)) - \$[x](\mathrm{Pot}(I)) = \$[x \vee (-x)](\mathrm{Pot}(I \dot\cup I))$. (Dabei wurde mit $-x$ die Familie $(-x_\iota; \iota \in I)$ bezeichnet.) Diese Eigenschaft der Wertebereiche kann mit dem zweiten Teil des folgenden Satzes zur Lokalisierung von $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ auf den Mengen aus $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ verwendet werden.

<u>(9.6) Satz.</u> Sei $(E,\mathcal{R})$ eine kommutative separierte topologische Gruppe und $(M_n; n \in \mathbb{N})$ sei eine Folge von Teilmengen von E mit $0 \in M_1$ und $M_n - M_n \subset M_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann sind die beiden folgenden

Aussagen äquivalent:

(a) $\mathcal{U}_o(\mathcal{R}) \cap M_n$ hat eine abzählbare Basis für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Die durch $\mathcal{R}$ auf M_n induzierte Uniformität ist metrisierbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $(F, \mathcal{F})$ eine weitere kommutative topologische Gruppe und $T: E \longrightarrow F$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(c) $T|M_n: (M_n, \mathcal{R} \cap M_n) \longrightarrow (F, \mathcal{F})$ ist stetig in 0 für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) $T|M_n: M_n \longrightarrow (F, \mathcal{F})$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig stetig bezüglich der durch $\mathcal{R}$ auf M_n induzierten Uniformität.

Für eine Quasinorm $q: E \longrightarrow \mathbb{R}$ an Stelle von T sind die (c) bzw. (d) entsprechenden Aussagen ebenfalls äquivalent.

<u>Beweis:</u> "(b)$\Longrightarrow$(a)" und "(d)$\Longrightarrow$(c)" sind unmittelbar klar.

<u>(a)$\Longrightarrow$(b):</u> Sei $(U_m; n \in \mathbb{N})$ eine Folge in $\mathcal{U}_o(\mathcal{R})$, so daß $(U_m \cap M_{n+1};\ m \in \mathbb{N})$ eine Basis von $\mathcal{U}_o(\mathcal{R}) \cap M_{n+1}$ ist. Zu jedem $V \in \mathcal{U}_o(\mathcal{R})$ gibt es dann ein $k \in \mathbb{N}$ mit $U_k \cap M_{n+1} \subset V \cap M_{n+1}$. Daraus folgt: $\{(x,y) \in M_n \times M_n;\ x - y \in U_k\} \subset \{(x,y) \in M_n \times M_n;\ x - y \in V\}$. Die Mengen der Form $\{(x,y) \in M_n \times M_n;\ x - y \in U_k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ bilden daher eine Basis für die durch $\mathcal{R}$ auf M_n induzierte Uniformität. Mit der Separiertheit von $\mathcal{R}$ folgt die Behauptung.

<u>(c)$\Longrightarrow$(d):</u> Ist $T|M_{n+1}: (M_{n+1}, \mathcal{R} \cap M_{n+1}) \longrightarrow (F, \mathcal{F})$ in 0 stetig, so gibt es zu $V \in \mathcal{U}_o(F, \mathcal{F})$ ein $U \in \mathcal{U}_o(E, \mathcal{R})$ mit $T(M_{n+1} \cap U) \subset V$. Damit erhält man: $(x,y) \in M_n \times M_n,\ x - y \in U \Longrightarrow (x - y) \in (M_n - M_n) \cap U \Longrightarrow (x - y) \in M_{n+1} \cap U \Longrightarrow T(x - y) = T(x) - T(y) \in V$. Also ist $T|M_n: M_n \longrightarrow (F, \mathcal{F})$ bezüglich der durch $\mathcal{R}$ auf M_n induzierten Uniformität gleichmäßig stetig.

Für eine Quasinorm $q: E \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt insbesondere $|q(x) - q(y)| \leq q(x - y)$ $(x, y \in E)$. Wie oben kann man daher "(c)$\Longrightarrow$(d)" auch für Quasinormen beweisen. ./.

<u>(9.7) Bemerkungen.</u>

(a) Der erste Teil von Satz (9.6) verallgemeinert ein beim Beweis von Satz (5.8) unter (2) verwendetes Resultat von KALTON[71, p. 402, (1.3)].

(b) Der Beweis von Satz (9.6) zeigt, daß man von der Relativtopologie auf $M - M$ auf die Relativuniformität von M schließen kann.

(c) Die Idee, für Teilmengen A eines topologischen linearen Raumes und lineare Abbildungen die Stetigkeit in $0 \in A$ mit der gleich-

mäßigen Stetigkeit, also die Relativtopologie mit der Relativuniformität zu vergleichen, stammt von GROTHENDIECK[57, p. 134]. Dort wird folgende Aussage bewiesen:

Sei A eine konvexe symmetrische Teilmenge eines linearen Raumes E und $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ seien zwei lokalkonvexe Topologien auf E. Induzieren $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ auf A das gleiche System von Nullumgebungen, so induzieren $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ auf A auch die gleiche Uniformität. Bei IYAHEN[66, p. 304] wird obige Aussage auf kreisförmige semikonvexe Teilmengen A (d.h. es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $A + A \subset \alpha A$) topologischer linearer Räume verallgemeinert.

(d) Ist $A \subset E$, $0 \in A$ und $T: E \longrightarrow F$ linear, so ist $T|A : (A, \mathcal{R} \cap A) \longrightarrow (F, \mathcal{T})$ genau dann stetig in $0 \in A$, wenn $T|\lambda A: (\lambda A, \mathcal{R} \cap (\lambda A)) \longrightarrow (F, \mathcal{T})$ für alle $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ in 0 stetig ist.

<u>Bew.:</u> Sei $T|A : (A, \mathcal{R} \cap A) \longrightarrow (F, \mathcal{T})$ stetig in $0 \in A$. $V \in \mathcal{U}_0(F, \mathcal{T})$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ seien vorgegeben. O.E. sei V kreisförmig. Es gibt dann ein $U \in \mathcal{U}_0(E, \mathcal{R})$, U kreisförmig, mit $T((\lambda^{-1}U) \cap A) \subset (\lambda^{-1}V)$. Daraus folgt $T(U \cap (\lambda A)) \subset V$. ./.

Die Aussage von GROTHENDIECK[57, p. 134] erhält man daher aus (9.6), indem man $M_n := 2^n A$ $(n \in \mathbb{N})$ setzt.

(e) Mit Satz (9.6) kann man auch eine Aussage bei PORTA[99, p. 92, § 1] verifizieren. Vergleiche dazu auch den nachfolgenden Satz (9.10).

(f) Wie nach Definition (9.5) festgestellt wurde, folgt aus $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E, \mathcal{R})$ die Beziehung $K_1 + K_2 \in \mathcal{K}(E, \mathcal{R})$. Mit $0 \in K$ für alle $K \in \mathcal{K}(E, \mathcal{R})$ kann man daher zeigen, daß $\{(D, \mathcal{R} \cap D);$ $\exists\ K \in \mathcal{K}(E, \mathcal{R})$ mit $D = \overline{D}^{\mathcal{R}} \subset K\}$ eine Kompaktologie auf E im Sinne von Buchwalter[30, p. 9] ist. Dies wird jedoch im weiteren nicht verwendet werden.

<u>(9.8) Definition.</u> Sei $(E, \mathcal{R})$ ein topologischer linearer Raum. Eine Folge $(U_m; m \in \mathbb{N})$ von kreisförmigen absorbanten Teilmengen von E mit $U_{m+1} + U_{m+1} \subset U_m$ $(m \in \mathbb{N})$ heißt Faden in E. $(U_m; m \in \mathbb{N})$ heißt $\mathcal{R}$-topologisch, wenn $U_m \in \mathcal{U}_0(E, \mathcal{R})$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. (Vgl. etwa ADASCH[2, p. 51].)

<u>(9.9) Bemerkungen.</u>

(a) Jeder Faden definiert genau eine lineare Topologie auf E (vgl. etwa RŒLCKE[107, p. 33]); die Folge $(U_m; m \in \mathbb{N})$ ist wegen $0 \in U_m$ $(m \in \mathbb{N})$ absteigend, also eine Filterbasis.

(b) $(U_m; m \in \mathbb{N})$ ist genau dann $\mathcal{R}$-topologisch, wenn die von

$(U_m; m\in\mathbb{N})$ erzeugte lineare Topologie gröber als $\mathcal{R}$ ist.
(c) Der Metrisierungssatz (vgl. etwa SCHAEFER[115, p.28]) zeigt, daß es zu jedem Faden eine Pseudo-Halbnorm gibt, so daß der Faden und diese Pseudo-Halbnorm die gleiche lineare Topologie erzeugen.

<u>(9.10) Satz.</u> Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter topologischer linearer Raum; $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ sei wie in (8.1) erklärt und $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ sei die in der Kategorie der topologischen linearen Räume assoziierte OP-Topologie zu $\mathcal{R}$. Dann gilt:

(a) Ein Faden $(U_m; m\in\mathbb{N})$ in E ist genau dann $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-topologisch, wenn $U_m\cap K$ für jedes $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ und jedes $m\in\mathbb{N}$ eine $\mathcal{R}\cap K$-Nullumgebung ist.

(b) Eine Pseudo-Halbnorm q auf E ist genau dann $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-stetig, wenn $q|K: (K,\mathcal{R}\cap K)\longrightarrow\mathbb{R}$ für alle $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ in $0\in K$ stetig ist.

(c) Ist $(F,\mathcal{F})$ ein topologischer linearer Raum und $T: E\longrightarrow F$ linear, so ist $T: (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))\longrightarrow(F,\mathcal{F})$ genau dann stetig, wenn $T|K: (K,\mathcal{R}\cap K)\longrightarrow(F,\mathcal{F})$ für alle $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ in $0\in K$ stetig ist.

<u>Beweis:</u>
<u>Zu (a):</u> Sei $(U_m; m\in\mathbb{N})$ $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-topologisch. Dann ist $U_m\cap K$ eine $\mathcal{OP}(\mathcal{R})\cap K=\mathcal{R}\cap K$-Nullumgebung für alle $m\in\mathbb{N}$ und alle $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Sei jetzt $U_m\cap K\in\mathcal{R}\cap K$ für alle $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$, $m\in\mathbb{N}$. $\mathcal{T}$ sei die von $(U_m; m\in\mathbb{N})$ auf E erzeugte lineare Topologie. Wir betrachten zunächst ein festes $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$, zu dem die $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge $(x_n; n\in\mathbb{N})$ gehören möge und setzen: $x^1:=x=(x_n; n\in\mathbb{N})$, $x^{k+1}:=x^k\vee(-x^k)$ $(k\in\mathbb{N})$. Durch $K^k:=\overline{S[x^k](\mathcal{F}(\mathbb{N}))}^{\mathcal{R}}$ $(k\in\mathbb{N})$ ist dann eine Folge in $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ gegeben, die $0\in K^1$, $K^k-K^k\subset K^{k+1}$ $(k\in\mathbb{N})$ erfüllt. Nach Voraussetzung ist $id_{K^k}:(K^k,\mathcal{R}\cap K^k)\hookrightarrow(E,\mathcal{T})$ stetig in 0 für alle $k\in\mathbb{N}$, denn $(U_m; m\in\mathbb{N})$ ist eine Nullumgebungsbasis für $\mathcal{T}$ und es gilt $(id_{K^k})^{-1}(U_m)=U_m\cap K^k$ für alle $m,k\in\mathbb{N}$. Mit (9.6) erhält man also insbesondere die Stetigkeit von $id_K: (K,\mathcal{R}\cap K)\hookrightarrow(E,\mathcal{T})$ für alle $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Da $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ die Eigenschaft $(\mathcal{OP})$ besitzt, folgt hieraus mit Satz (8.10) die Stetigkeit von $id_E:(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))\longrightarrow(E,\mathcal{T})$. Damit gilt $\mathcal{T}\subset\mathcal{OP}(\mathcal{R})$, d.h. $(U_m; m\in\mathbb{N})$ ist $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-topologisch.
<u>Zu (b):</u> Ist $q:E\longrightarrow\mathbb{R}$ eine $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-stetige Pseudo-Halbnorm, so ist $q|K: (K,\mathcal{R}\cap K)\longrightarrow\mathbb{R}$ wegen $\mathcal{R}\cap K=\mathcal{OP}(\mathcal{R})\cap K$ für alle $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ stetig in $0\in K$.
Sei jetzt $q: E\longrightarrow\mathbb{R}$ eine Pseudo-Halbnorm und $q|K: (K,\mathcal{R}\cap K)\to\mathbb{R}$ sei stetig in $0\in K$ für alle $K\in\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Wir setzen

$U_m := q^{-1}([0,2^{-m}))$ $(m \in \mathbb{N})$. Dann ist $(U_m; m \in \mathbb{N})$ eine Folge kreisförmiger Mengen in E, die $U_{m+1} + U_{m+1} \subset U_m$ $(m \in \mathbb{N})$ erfüllen.
Beh.: U_m ist absorbant $(m \in \mathbb{N})$.
Bew.: Für jedes $x \in E$ ist $(2^{-n}x; n \in \mathbb{N})$ eine TF-summierbare Folge in $(E, \mathcal{R})$. Sei K das gemäß (8.1) zu dieser Folge gehörige Element aus $\mathcal{K}(E, \mathcal{R})$. Aus der Stetigkeit von $q|K: (K, \mathcal{R} \cap K) \longrightarrow \mathbb{R}$ in 0 folgt nun: Zu $m \in \mathbb{N}$ existiert $U \in \mathcal{U}_0(E, \mathcal{R})$ mit $q(z) < 2^{-m}$ für alle $z \in U \cap K$. Dabei kann man o.E. U kreisförmig annehmen. Da U absorbant ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n}x \in U$. Nach Definition von K gilt $2^{-n}x \in K$. Man hat also: $2^{-n}x \in U \cap K$ $\Longrightarrow$ $q(2^{-n}x) < 2^{-m} \Longrightarrow 2^{-n}x \in U_m$. Also ist U_m absorbant für alle $m \in \mathbb{N}$ und $(U_m; m \in \mathbb{N})$ ist Nullumgebungsbasis für eine lineare Topologie $\mathcal{T}$ auf E. Nach Voraussetzung ist $q|K: (K, \mathcal{R} \cap K) \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle $K \in \mathcal{K}(E, \mathcal{R})$ stetig in $0 \in K$. Daher ist $U_m \cap K$ eine $\mathcal{R} \cap K$-Nullumgebung für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $K \in \mathcal{K}(E, \mathcal{R})$. Mit (a) erhält man nun: $(U_m; m \in \mathbb{N})$ ist ein $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-Faden; es ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ und $q: (E, \mathcal{OP}(\mathcal{R})) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
Zu (c): Diese Aussage folgt aus (b), denn $T: (E, \mathcal{OP}(\mathcal{R})) \longrightarrow (F, \mathcal{Z})$ ist genau dann stetig, wenn für jede $\mathcal{Z}$-stetige Pseudo-Halbnorm p auf F durch $q := p \circ T$ eine $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-stetige Pseudo-Halbnorm auf E gegeben ist. ./.

(9.11) Korollar. Ein Erzeugendensystem von Pseudo-Halbnormen für $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ (gebildet in der Kategorie der topologischen linearen Räume) erhält man in der Form:

$$\mathcal{E}_1 := \{q: E \longrightarrow \mathbb{R};\ q \text{ eine Pseudo-Halbnorm auf } E,\ q|K: (K, \mathcal{R} \cap K) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig in } 0 \in K \text{ für alle } K \in \mathcal{K}(E, \mathcal{R})\}.$$

(9.12) Bemerkungen.
(a) Da die Aussagen und die Beweise von (9.10) und (9.11) nahezu wörtlich auf den Fall kommutativer separierter topologischer Gruppen bzw. separierter lokalkonvexer Räume übertragen werden können, verzichten wir auf die Formulierung der entsprechenden Aussagen.
(b) Eine zu Satz (9.10) analoge Aussage erhält man für BM$\mathcal{OP}$ mit $\mathcal{C}(E, \mathcal{R})$ an Stelle von $\mathcal{K}(E, \mathcal{R})$. Der Beweis ist einfacher, da man statt Satz (9.6) die entsprechende Aussage für absolutkonvexe Teilmengen verwenden kann.

Wir notieren noch zwei einfache Folgerungen:

(9.13) Korollar. Die assoziierte lokalkonvexe Topologie zur linear assoziierten OP-Topologie ist die lokalkonvex assoziierte OP-Topologie.

(9.14) Korollar. Seien $(E,\mathcal{R})$ und $(F,\mathcal{F})$ separierte topologische lineare Räume und H eine Menge linearer Abbildungen $h: E \longrightarrow F$. Dann sind äquivalent:

(a) $H: (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ ist gleichgradig stetig.

(b) Für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ ist $H|K := \{h|K;\ h \in H\} : (K, \mathcal{R} \cap K) \to (F,\mathcal{F})$ gleichgradig stetig in $0 \in K$.

Beweis:

(a) $\Longrightarrow$ (b): Ist $H: (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ gleichgradig stetig, so ist auch $H|K: (K,\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \cap K) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ gleichgradig stetig in $0 \in K$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Mit $\mathcal{R} \cap K = \mathcal{OP}(\mathcal{R}) \cap K$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ folgt daher die Behauptung.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sei $V \in \mathcal{U}_0(F,\mathcal{F})$, $U := \bigcap (h^{-1}(V); h \in H)$. Nach Voraussetzung (b) enthält $U \cap K$ für jedes $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ eine $\mathcal{R} \cap K$-Nullumgebung. Daraus folgt $U \in \mathcal{U}_0(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$.

(9.15) Bemerkung. Für kommutative separierte topologische Gruppen und für separierte lokalkonvexe Räume kann man eine entsprechende Aussage beweisen.

Zusammenfassend können wir die OP-Topologie eines separierten topologischen linearen Raumes $(E,\mathcal{R})$ wie folgt charakterisieren:

(9.16) Satz. Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter topologischer linearer Raum; $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ sei wie in (8.1) erklärt. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\mathcal{R} = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$.

(b) Ist $\mathcal{T}$ eine lineare Topologie auf E, für die $(\mathcal{R},\mathcal{T})$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar ist, so ist $\mathcal{R} = \mathcal{T}$.

(c) Mit $\mathfrak{M} := \{\mathcal{T};\ \mathcal{T}$ eine lineare Topologie auf E, $\mathcal{T} \cap K \subset \mathcal{R} \cap K$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})\}$ gilt $\mathcal{R} = \bigvee \mathfrak{M}$.

(d) Für jeden separierten topologischen linearen Raum $(F,\mathcal{F})$ ist jede $\mathcal{OP}$-stetige lineare Abbildung $T: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ bereits stetig.

(e) Gleiche Aussage wie (d) mit "$(F,\mathcal{F})$ vollständig metrisierbarer topologischer linearer Raum".

(f) Für jeden separierten topologischen linearen Raum $(F,\mathcal{F})$ ist jede Σ-stetige lineare Abbildung $T: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ bereits stetig.

(g) $\mathcal{G}_1$ aus Satz (9.3) ist eine $\mathcal{R}$-Nullumgebungsbasis.

(h) Jeder Faden $(U_m; m \in \mathbb{N})$, für den $U_m \cap K$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ und alle $m \in \mathbb{N}$ eine $\mathcal{R} \cap K$-Nullumgebung ist, ist bereits $\mathcal{R}$-topologisch.

(i) $\mathcal{E}_1$ aus (9.11) ist ein Erzeugendensystem von Pseudo-Halbnormen

für $\mathcal{R}$.

(j) Ist $(F,\mathcal{F})$ ein separierter topologischer linearer Raum und H eine Menge linearer Abbildungen $h: E \longrightarrow F$, so ist $H: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ genau dann gleichgradig stetig, wenn $H|K: (K,\mathcal{R} \cap K) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ in $0 \in K$ gleichgradig stetig ist.

Im Fall lokalkonvexer Räume kommt zu den entsprechenden Aussagen noch folgende hinzu:

(k) $H \subset E^*$ ist genau dann gleichgradig stetig auf $(E,\mathcal{R})$, wenn für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ die Einschränkung $H|K$ auf $(K,\mathcal{R} \cap K)$ in 0 gleichgradig stetig ist.

Die Äquivalenz der Aussagen (a),...,(j) gilt sinngemäß auch für kommutative separierte topologische Gruppen.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir die lokalkonvexe Version von Satz (9.10) zum Beweis von Vollständigkeitsaussagen für das OP-Dual und das BMOP-Dual eines separierten lokalkonvexen Raumes $(E,\mathcal{R})$ verwenden.

<u>(9.17) Satz.</u> Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter lokalkonvexer Raum; $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ sei wie in (8.1) erklärt. Dann ist $E^{\#} := (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))'$, versehen mit der Topologie $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$, vollständig.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen zunächst, daß das Mengensystem $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ die Bedingungen

(B1) $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R}) \Longrightarrow \exists\, K_3 \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ mit $K_1 \cup K_2 \subset K_3$.

(B2) $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R}),\ \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$.

(B3) $[\bigcup \mathcal{K}(E,\mathcal{R})] = E$.

aus ROBERTSON, ROBERTSON[106, p. 55] erfüllt.

$0 \in K_1,\ 0 \in K_2 \Longrightarrow K_1 \cup K_2 \subset K_1 + K_2$. Sind $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$, $K_1 = \$[x](\mathrm{Pot}(\mathbb{N}))$, $K_2 = \$[y](\mathrm{Pot}(\mathbb{N}))$, so gilt mit $z = x \vee y$ die Beziehung $K_1 + K_2 = \$[z](\mathrm{Pot}(\mathbb{N})) \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$. Ist $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt $\lambda K = \$[\lambda x](\mathrm{Pot}(\mathbb{N})) \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$, wenn $K = \$[x](\mathrm{Pot}(\mathbb{N}))$ war. (B3) ist sogar ohne die Bildung des linearen Spanns erfüllt, denn für jedes $x \in E$ ist die Folge $(2^{-n}x; n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{R}$-TF-summierbar. Weiterhin sind die Mengen $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ auch $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-kompakt und damit $\sigma(E,E^{\#})$-beschränkt. Nach ROBERTSON, ROBERTSON[106, p. 111, Satz 1] hat man daher für die Vervollständigung $(\widetilde{E^{\#}}, \widetilde{\mathcal{F}(\mathcal{K})})$ von $(E^{\#}, \mathcal{F}(\mathcal{K}))$ die Darstellung

$\widetilde{E}^* = \bigcap (E^* + K^o;\ K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R}))$, wobei die Polaren in E^* zu bilden sind. Wir zeigen $\widetilde{E}^* \subset E^*$.
Sei $\mathcal{B}_o(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ eine Nullumgebungsbasis von $(E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$, die aus absolutkonvexen abgeschlossenen Mengen besteht. Dann gilt
$E^* = (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))' = \bigcup (U^o;\ U \in \mathcal{B}_o(\mathcal{OP}(\mathcal{R})))$. Aus obiger Darstellung von $\widetilde{E}^*$ erhält man:

$z^* \in \widetilde{E}^* \Longleftrightarrow$ Zu jedem $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ existiert ein $U \in \mathcal{B}_o(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ mit $z^* \in U^o + K^o$.

Sei $z^* \in \widetilde{E}^*$. Um $z^* \in E^*$ zu zeigen, genügt es nach (der lokalkonvexen Version von) Satz (9.10c) zu zeigen, daß
$z^*|K:(K,\mathcal{R} \cap K) \longrightarrow \mathbb{K}$ für jedes $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ in $0 \in K$ stetig ist.
Wegen (B2) ist $(\frac{2}{\varepsilon} K) \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ für alle $\varepsilon > 0$. Es gibt also zu $\frac{2}{\varepsilon} K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ ein $U \in \mathcal{B}_o(\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ mit $z^* \in (\frac{2}{\varepsilon} U)^o + (\frac{2}{\varepsilon} K)^o = \frac{\varepsilon}{2}(U^o + K^o) \subset \varepsilon (U \cap K)^o. \Longrightarrow z^*|K:(K,\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \cap K) \longrightarrow \mathbb{K}$ ist in $0 \in K$ stetig. Mit $\mathcal{R} \cap K = \mathcal{OP}(\mathcal{R}) \cap K$ $(K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R}))$ folgt daher, daß $z^*|K:(K,\mathcal{R} \cap K) \longrightarrow \mathbb{K}$ in $0 \in K$ stetig ist und deshalb gilt $z^* \in E^*$. ./.

<u>(9.18) Korollar.</u> Für jeden separierten lokalkonvexen Raum $(E,\mathcal{R})$ ist die Vervollständigung $(\widetilde{E'},\widetilde{\mathcal{T}(\mathcal{K})})$ von $(E',\mathcal{T}(\mathcal{K}))$ ein Teilraum von $E^* = (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))'$.

Ich weiß nicht, ob E' stets $\mathcal{T}(\mathcal{K})$-dicht in E^* ist.

<u>(9.19) Satz.</u> Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter lokalkonvexer Raum; $\mathcal{C}(E,\mathcal{R})$ sei wie in (8.1) erklärt. Dann ist $E^* := (E,BM\mathcal{OP}(\mathcal{R}))'$, versehen mit der Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen $K \in \mathcal{C}(E,\mathcal{R})$ gerade die Vervollständigung von $(E',\mathcal{T}(\mathcal{C}) \cap E')$.

<u>Beweis:</u> Wie in (8.4a) und (9.12b) bemerkt wurde, kann man zeigen, daß $BM\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ die lokalkonvexe Finaltopologie auf E bezüglich der Abbildungen $id_K:(K,\mathcal{R} \cap K) \hookrightarrow E$ $(K \in \mathcal{C}(E,\mathcal{R}))$ ist und daß ein lineares Funktional $x^* \in E^*$ genau dann $BM\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-stetig ist, wenn $x^*|K:(K,\mathcal{R} \cap K) \longrightarrow \mathbb{K}$ für alle $K \in \mathcal{C}(E,\mathcal{R})$ in $0 \in K$ stetig ist. Da $\mathcal{C}(E,\mathcal{R})$ aus absolutkonvexen kompakten Mengen besteht und die Bedingungen (B1), (B2) und (B3) aus ROBERTSON, ROBERTSON [106, p. 55] erfüllt, kann man direkt Satz 2 aus ROBERTSON, ROBERTSON [106, p. 113] anwenden und erhält das Ergebnis. ./.

<u>(9.20) Korollar.</u> Fallen in dem separierten lokalkonvexen Raum $(E,\mathcal{R})$ die TF-summierbaren und die BM-summierbaren Folgen zusammen, so

ist $E^{\#} = E^{*}$ gerade die Vervollständigung von $(E', \mathcal{T}(\mathcal{K}) \cap E') = (E', \mathcal{T}(\mathcal{C}) \cap E')$ (vergl. KÖTHE[80, p. 257, (4)]).

Korollar (9.20) verallgemeinert ein Resultat von TWEDDLE[130, p. 604, Prop. 2].

<u>(9.21) Beispiele.</u>

(a) Sei $(E,\mathcal{R}) := (m_o, \sigma(m_o, l^1))$. Nach (7.13a) ist $E^{*} = l^1$. Beim Beweis von (4.5b) wurde gezeigt, daß $\beta(l^1, m_o)$ gerade die $\|\cdot\|_1$-Topologie auf l^1 ist. Nach Definition von $\mathcal{T}(\mathcal{K})$ gilt $\mathcal{T}(\mathcal{K}) \cap l^1 \subset \beta(l^1, m_o)$.
In m_o ist die Folge $x := (e_n; n \in \mathbb{N})$ der Einheitsvektoren $\sigma(m_o, l^1)$-TF-summierbar. Mit Lemma (1.13) folgt $\{\sum_{n\in\sigma} \lambda_n e_n; |\lambda_n| \leq 1 \ (n \in \sigma), \sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\} \subset 4\Gamma(\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N})))$. Die $(m_o, \|\cdot\|_\infty)$-Einheitskugel liegt daher im $\sigma(m_o, l^1)$-Abschluß von $4\Gamma(\$[x](\mathcal{F}(\mathbb{N})))$ und deshalb in der Sättigung (KÖTHE[80, p. 257]) des Mengensystems $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$.
Da die $\|\cdot\|_\infty$-beschränkten Teilmengen von m_o und die $\sigma(m_o, l^1)$-beschränkten Teilmengen von m_o zusammenfallen, folgt $\mathcal{T}(\mathcal{K}) \cap l^1 \supset \beta(l^1, m_o)$. In diesem Fall stimmt also $\mathcal{T}(\mathcal{K})$ mit der $\|\cdot\|_1$-Topologie überein.

Nach Satz (1.24a) ist $E^{\#} = m_o^{*}$; die Elemente aus $\mathcal{C}(E,\mathcal{R})$ sind endlich dimensional und es gilt $\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \sigma(m_o^{*}, m_o)$.
(b) $(E,\mathcal{R}) := (l^2, \sigma(l^2, l^2))$. Nach (7.13b) ist $E^{*} = E^{\#} = l^2$ und $\mathcal{OP}(\sigma(l^2, l^2)) = \tau(l^2, l^2)$ stimmt mit der $\|\cdot\|_2$-Topologie überein. Wegen der Vollständigkeit von $(l^2, \|\cdot\|_2)$ besteht die Sättigung des Mengensystems $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ aus $\|\cdot\|_2$-relativ kompakten Mengen. $\mathcal{T}(\mathcal{K}) = \mathcal{T}(\mathcal{C})$ ist also eine vollständige lokalkonvexe Topologie, die echt zwischen $\sigma(l^2, l^2)$ und $\tau(l^2, l^2)$ liegt.

IV. Kapitel

Vergleich der assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie mit anderen Topologien

In diesem Kapitel wollen wir die assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologie mit anderen Topologien vergleichen, um damit eine möglichst genaue Eingrenzung für $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ zu erhalten. Dabei betrachten wir zunächst andere assoziierte Topologien, und die folgenden Vorbemerkungen über spezielle Funktoren dienen dazu, ein abstraktes Konstruktionsverfahren für (final) assoziierte Topologien zu erläutern und eine einheitliche Bezeichnungsweise zu ermöglichen.

§ 10 Vorbemerkungen über spezielle Funktoren.

Im folgenden sei $\mathcal{K}$ eine der Kategorien

KTG = kommutative topologische Gruppen.
TLR = topologische lineare Räume.
LKX = lokalkonvexe Räume.

Mit $Ob(\mathcal{K})$ wird die Objektklasse von $\mathcal{K}$ bezeichnet; $Mor(X,Y)$ bezeichnet die Menge der $\mathcal{K}$-Morphismen von X nach Y. Abbildungen $T: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ zwischen Objekten aus $\mathcal{K}$, die nur Morphismen bezüglich der zugrunde liegenden algebraischen Struktur sind, nennen wir "algebraische $\mathcal{K}$-Morphismen".

Ist durch $\mathcal{Z}: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$, $\mathcal{Z}(E,\mathcal{R}) = (E,\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$ für alle $(E,\mathcal{R})$ aus $Ob(\mathcal{K})$, $\mathcal{Z}(S) = S$ für alle $S \in Mor((E,\mathcal{R}),(F,\mathcal{F}))$ ein Funktor in $\mathcal{K}$ gegeben, so nennen wir $\mathcal{Z}$ eine funktorielle Topologie oder auch einen Funktor vom Typ (T). Offenbar ist $\mathcal{OP}$ in jeder der drei betrachteten Kategorien eine funktorielle Topologie.

Für zwei funktorielle Topologien $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ in $\mathcal{K}$ schreiben wir $\mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{Z}_2$, wenn $\mathcal{Z}_1(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Z}_2(\mathcal{R})$ für alle Objekte $(E,\mathcal{R})$ aus $\mathcal{K}$ gilt. Mit $\mathcal{Z}_1 \wedge \mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_1 \vee \mathcal{Z}_2$ bzw. $\mathcal{Z}_1 \circ \mathcal{Z}_2$ bezeichnen wir die durch

$$\mathcal{Z}_1 \wedge \mathcal{Z}_2(\mathcal{R}) := \mathcal{Z}_1(\mathcal{R}) \overset{\mathcal{K}}{\wedge} \mathcal{Z}_2(\mathcal{R}) \quad \text{(in } \mathcal{K} \text{ gebildetes Infimum)}$$

$$\mathcal{Z}_1 \vee \mathcal{Z}_2(\mathcal{R}) := \mathcal{Z}_1(\mathcal{R}) \vee \mathcal{Z}_2(\mathcal{R}) \; ; \; \mathcal{Z}_1 \circ \mathcal{Z}_2(\mathcal{R}) := \mathcal{Z}_1(\mathcal{Z}_2(\mathcal{R}))$$

für alle $(E,\mathcal{R}) \in Ob(\mathcal{K})$ definierten funktoriellen Topologien. (Aus der Charakterisierung der unteren und oberen Grenze zweier Topologien als $\mathcal{K}$-Final bzw. Initialtopologie ersieht man unmittelbar, daß durch obige Definitionen wieder funktorielle Topologien in $\mathcal{K}$ gegeben sind.)

<u>(10.1)</u> Ist $\mathcal{Z}$ eine funktorielle Topologie in $\mathcal{K}$ und $(E_1,\mathcal{R}_1), \ldots, (E_n,\mathcal{R}_n) \in Ob(\mathcal{K})$, so gilt $\mathcal{Z}(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{Z}(\mathcal{R}_i)$.

<u>Bew.:</u> Wie in (7.6) zeigt man $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{Z}(\mathcal{R}_i) \subset \mathcal{Z}(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i)$. In allen drei

Kategorien stimmt $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i$ (bzw. $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{Z}(\mathcal{R}_i)$) mit der in $\mathcal{K}$ gebildeten direkten Summe $\coprod_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i$ (bzw. $\coprod_{i=1}^{n} \mathcal{Z}(\mathcal{R}_i)$) überein. Aus der Stetigkeit der kanonischen Injektionen

$$j_i : (E_i, \mathcal{R}_i) \hookrightarrow (\coprod_{k=1}^{n} E_k, \coprod_{k=1}^{n} \mathcal{R}_k) \qquad (i = 1,\dots,n)$$

erhält man die Stetigkeit der Abbildungen

$$j_i : (E_i, \mathcal{Z}(\mathcal{R}_i)) \hookrightarrow (\coprod_{k=1}^{n} E_k, \mathcal{Z}(\coprod_{k=1}^{n} \mathcal{R}_k)) \qquad (i = 1,\dots,n)$$

und daraus

$$\mathcal{Z}(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i) = \mathcal{Z}(\coprod_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i) \subset \coprod_{i=1}^{n} \mathcal{Z}(\mathcal{R}_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{Z}(\mathcal{R}_i). \qquad ./.$$

Mit Id werde die Identität in $\mathcal{K}$ bezeichnet. Wir werden hier vorwiegend Aussagen der Form $\mathcal{Z} \subset \mathcal{OP}$ bzw. $\mathcal{OP} \subset \mathcal{Z}$ untersuchen. Ist $\mathrm{Id} \subset \mathcal{Z}$, so ist $\mathcal{Z} \subset \mathcal{OP}$ ein Satz vom ORLICZ-PETTIS-Typ.

Jede funktorielle Topologie $\mathcal{Z}$ in $\mathcal{K}$ zeichnet eine gewisse Teilklasse von $\mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ aus, nämlich die Fixklasse:

$$\mathrm{Fix}(\mathcal{Z}) := \{(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K});\ \mathcal{Z}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}\}.$$

Zwischen der Inklusion der Funktoren und der Inklusion der zugehörigen Fixklassen besteht folgender einfacher Zusammenhang:

<u>(10.2a)</u> $\mathcal{Z}_1 \supset \mathcal{Z}_2 \supset \mathrm{Id} \Longrightarrow \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_1) \subset \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_2)$.

<u>Bew.:</u> $(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_1) \Longrightarrow \mathcal{R} = \mathcal{Z}_1(\mathcal{R}) \supset \mathcal{Z}_2(\mathcal{R}) \supset \mathcal{R} \Longrightarrow$
$\mathcal{Z}_2(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \Longrightarrow (E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_2)$. ./.

<u>(10.2b)</u> $\mathrm{Id} \subset \mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_1^2$, $\mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_1) \subset \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_2) \Longrightarrow \mathcal{Z}_1 \supset \mathcal{Z}_2$.

<u>Bew.:</u> $(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$, $\mathcal{T} := \mathcal{Z}_1(\mathcal{R}) \Longrightarrow (E,\mathcal{T}) \in \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_1)$, da
$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_1^2$. $\mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_1) \subset \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_2) \Longrightarrow (E,\mathcal{T}) \in \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_2) \Longrightarrow$
$\mathcal{T} = \mathcal{Z}_1(\mathcal{R}) = \mathcal{Z}_2(\mathcal{T}) \supset \mathcal{Z}_2(\mathcal{R})$, da $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$. ./.

<u>(10.3)</u> Sei $\mathcal{Z} \supset \mathrm{Id}$ eine funktorielle Topologie in $\mathcal{K}$. Dann gilt: Ist $(F,\mathcal{F}) \in \mathrm{Fix}(\mathcal{Z})$ und $T: (F,\mathcal{F}) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ ein $\mathcal{K}$-Morphismus, so faktorisiert T über $(E,\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$.

<u>(10.4)</u> Sei $\mathcal{Z} \supset \mathrm{Id}$ eine funktorielle Topologie in $\mathcal{K}$. Trägt $(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ die in $\mathcal{K}$ gebildete Finaltopologie bezüglich einer Familie $((E_\iota,\mathcal{R}_\iota);\iota \in I)$ von Objekten aus $\mathrm{Fix}(\mathcal{Z})$ und algebraischen $\mathcal{K}$-Morphismen $T_\iota: E_\iota \longrightarrow E$ $(\iota \in I)$, so gilt $(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Fix}(\mathcal{Z})$. (D.h. $\mathrm{Fix}(\mathcal{Z})$ ist abgeschlossen gegenüber der Bildung finaler Topologien in $\mathcal{K}$.)

<u>Bew.:</u> $T_\iota: (E_\iota,\mathcal{R}_\iota) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ ist stetig für alle $\iota \in I. \Longrightarrow$

$T_\iota : (E_\iota, \mathcal{Z}(\mathcal{R}_\iota)) \longrightarrow (E, \mathcal{Z}(\mathcal{R}))$ ist stetig für alle $\iota \in I$.
$(E_\iota, \mathcal{R}_\iota) \in \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}) \Longrightarrow \mathcal{R}_\iota = \mathcal{Z}(\mathcal{R}_\iota)$ für alle $\iota \in I. \Longrightarrow$
$T_\iota : (E_\iota, \mathcal{R}_\iota) \longrightarrow (E, \mathcal{Z}(\mathcal{R}))$ ist stetig für alle $\iota \in I$. Aus der Definition der in $\mathcal{K}$ gebildeten Finaltopologie folgt $\mathcal{R} \supset \mathcal{Z}(\mathcal{R})$. Nach Voraussetzung ist $\mathrm{Id} \subset \mathcal{Z}$, also folgt $\mathcal{R} = \mathcal{Z}(\mathcal{R})$. ./.

<u>(10.5)</u> Ist $\mathcal{Z} \supset \mathrm{Id}$ eine funktorielle Topologie in $\mathcal{K}$, so kann man für jede Ordinalzahl α die funktorielle Topologie $\mathcal{Z}^\alpha$ wie folgt definieren:

$$\mathcal{Z}^\alpha(\mathcal{R}) := \begin{cases} \mathcal{Z}(\mathcal{Z}^\beta(\mathcal{R})) & \text{für } \alpha = \beta + 1 \\ \bigvee \{\mathcal{Z}^\beta(\mathcal{R}); \beta < \alpha\}, & \text{sofern } \alpha \text{ eine Limeszahl ist.} \end{cases}$$

für alle $(E, \mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$.
Wegen $\mathcal{Z} \supset \mathrm{Id}$ gibt es aus Mächtigkeitsgründen zu jedem $(E, \mathcal{R})$ aus $\mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ eine Ordinalzahl $\alpha = \alpha(E, \mathcal{R})$ mit $\mathcal{Z}^\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{Z}^{\alpha+1}(\mathcal{R})$. Wir definieren zu $\mathcal{Z}$ die funktorielle Topologie $\hat{\mathcal{Z}}$ durch $\hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{R}) := \mathcal{Z}^\alpha(\mathcal{R})$ für eine Ordinalzahl $\alpha = \alpha(E, \mathcal{R})$ mit $\mathcal{Z}^\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{Z}^{\alpha+1}(\mathcal{R})$. Offenbar ist $\hat{\mathcal{Z}}$ wohldefiniert und idempotent.

Eine andere Darstellung von $\hat{\mathcal{Z}}$ erhält man mit der Fixklasse $\mathrm{Fix}(\mathcal{Z})$ zu $\mathcal{Z}$. Es ist

$$\hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{R}) = \bigwedge^{\mathcal{K}} \{\mathcal{T};\ (E, \mathcal{T}) \in \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}),\ \mathcal{T} \supset \mathcal{R}\}$$

für alle $(E, \mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$.

Aus (10.4) folgt $(E, \hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{R})) \in \mathrm{Fix}(\mathcal{Z})$ für alle $(E, \mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ und man erhält $\mathrm{Fix}(\hat{\mathcal{Z}}) = \mathrm{Fix}(\mathcal{Z})$ für jede funktorielle Topologie $\mathcal{Z} \supset \mathrm{Id}$ in $\mathcal{K}$. (Man vergleiche dazu die Konstruktion der assoziierten tonnelierten Topologie bei KŌMURA[82, p. 150].)

<u>(10.6)</u> Ist $\mathcal{L}$ eine nicht leere Klasse von Objekten aus $\mathcal{K}$, die gegenüber der Bildung von Finaltopologien in $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist, so ist durch

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\mathcal{R}) := \bigwedge^{\mathcal{K}} \{\mathcal{T};\ (E, \mathcal{T}) \in \mathcal{L},\ \mathcal{T} \supset \mathcal{R}\}$$

für alle $(E, \mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ eine idempotente funktorielle Topologie $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}} \supset \mathrm{Id}$ in $\mathcal{K}$ gegeben und es gilt $\mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$.

<u>Bew.:</u> Man sieht leicht, daß $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}^2 = \mathcal{Z}_{\mathcal{L}} \supset \mathrm{Id}$ gilt und daß $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}$ funktoriell ist. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{L}$ abgeschlossen gegenüber der Bildung von Finaltopologien in $\mathcal{K}$. Damit folgt $(E, \mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\mathcal{R})) \in \mathcal{L}$ für alle $(E, \mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}). \Longrightarrow \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}) \subset \mathcal{L}$. Ist $(E, \mathcal{T}) \in \mathcal{L}$, so gilt offenbar $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}. \Longrightarrow \mathcal{L} \subset \mathrm{Fix}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}})$. ./.

<u>(10.7)</u> Ist $\mathcal{L}$ wie in (10.6), $(E, \mathcal{T}) \in \mathcal{L}$, $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$ und faktorisiert jeder $\mathcal{K}$-Morphismus $T : (F, \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ mit $(F, \mathcal{F}) \in \mathcal{L}$ über

$(E,\mathcal{T})$, so ist $\mathcal{T} = \mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\mathcal{R})$.

Bew.: $(E,\mathcal{T}) \in \mathcal{L} \Longrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{T}$ nach Definition von $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}$.
$id_E:(E,\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\mathcal{R})) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ ist stetig wegen $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{R}$ und es gilt $(E,\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\mathcal{R})) \in \mathcal{L}$. Also folgt die Stetigkeit von $id_E:(E,\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\mathcal{R})) \longrightarrow (E,\mathcal{T})$, d.h. $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{T}$. ./.

(10.8) Die durch (10.4) und (10.6) gegebenen Zuordnungen zwischen idempotenten funktoriellen Topologien $\mathcal{Z} \supset Id$ in $\mathcal{K}$ und Teilklassen $\mathcal{L}$ (=Fix($\mathcal{Z}$)) von Ob($\mathcal{K}$), die gegenüber der Bildung finaler Topologien in $\mathcal{K}$ abgeschlossen sind, sind zueinander invers.

(10.9) Ist $\mathcal{R}$ eine beliebige nicht leere Klasse von Objekten in $\mathcal{K}$, so erhält man eine gegenüber der Bildung finaler Topologien in $\mathcal{K}$ abgeschlossene Klasse $\tilde{\mathcal{R}}$, indem man alle Finalobjekte, die in $\mathcal{K}$ mit Objekten aus $\mathcal{R}$ gebildet werden können, zu $\mathcal{R}$ hinzunimmt. D.h.

$(E,\mathcal{T}) \in \tilde{\mathcal{R}} :\Longleftrightarrow$ Es gibt eine Familie $((E_\iota,\mathcal{T}_\iota);\iota \in I)$ in $\mathcal{R}$ und algebraische $\mathcal{K}$-Morphismen $T_\iota:E_\iota \longrightarrow E$ $(\iota \in I)$, so daß $\mathcal{T}$ die in $\mathcal{K}$ gebildete Finaltopologie bezüglich $T_\iota:(E_\iota,\mathcal{T}_\iota) \longrightarrow E$ $(\iota \in I)$ ist.

Zu $\tilde{\mathcal{R}}$ gibt es dann gemäß (10.2b) und (10.6) genau eine idempotente funktorielle Topologie $\mathcal{Z} \supset Id$ in $\mathcal{K}$ mit $\tilde{\mathcal{R}} = Fix(\mathcal{Z})$. (Man vergleiche hierzu die Konstruktion der assoziierten bornologischen bzw. ultrabornologischen Topologie bei POWELL [100, p. 21] und (10.17), (10.18) in diesem Paragraphen.)

(10.10) Sind $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \supset Id$ funktorielle Topologien in $\mathcal{K}$, so gilt

$$Fix(\mathcal{Z}_1 \vee \mathcal{Z}_2) = Fix(\mathcal{Z}_1) \cap Fix(\mathcal{Z}_2).$$

Bew.: $\mathcal{Z}_1 \vee \mathcal{Z}_2(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, $\mathcal{Z}_1 \vee \mathcal{Z}_2 \supset \mathcal{Z}_i \supset Id$ $(i = 1,2) \Longrightarrow$
$\mathcal{R} = \mathcal{Z}_1 \vee \mathcal{Z}_2(\mathcal{R}) \supset \mathcal{Z}_i(\mathcal{R}) \supset \mathcal{R}$ $(i = 1,2) \Longrightarrow \mathcal{Z}_i(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ $(i = 1,2)$.
$\mathcal{Z}_i(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ $(i = 1,2) \Longrightarrow \mathcal{Z}_1 \vee \mathcal{Z}_2(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$. ./.

Wir zeigen nun an einigen klassischen Beispielen aus der Theorie der lokalkonvexen Räume bzw. der Theorie der topologischen linearen Räume, wie die oben eingeführten Begriffe verwendet werden. Zunächst sei $\mathcal{K} = LKX$.

(10.11) $\mathcal{Z} := \tau$, d.h. $\mathcal{Z}(\mathcal{R}) := \tau(E,(E,\mathcal{R})')$ für alle $(E,\mathcal{R})$ aus Ob(LKX). $\tau \supset Id$ ist der Satz von MACKEY-ARENS und Fix(τ) enthält genau die MACKEY-Räume. Es gilt $\tau^2 = \tau$ und damit

$\hat{\tau} = \tau$.

(10.12) $\mathcal{Z} = \beta^*$, d.h. $\mathcal{Z}(\mathcal{R}) := \beta^*(E,(E,\mathcal{R})')$ für alle $(E,\mathcal{R})$ aus Ob(LKX). Es ist $\beta^* \supset \tau$, also auch $\beta^* \supset$ Id. Setzt man für $(F,\mathcal{F})$ den nicht distinguierten (F)-Raum aus KÖTHE[80, p. 438] ein, so ist $(E,\mathcal{R}) := (F',\beta^*(F',F))$ nach KÖTHE[80, p. 403 (3)] nicht quasitonneliert. Also ist β^* nicht idempotent. Fix(β^*) ist gerade die Klasse der quasitonnelierten Räume. $\widehat{\beta^*}$ ist die assoziierte quasitonnelierte Topologie.

(10.13) $\mathcal{Z} = \beta$, d.h. $\mathcal{Z}(\mathcal{R}) := \beta(E,(E,\mathcal{R})')$ für alle $(E,\mathcal{R})$ aus Ob(LKX). Es ist $\beta \supset \beta^*$, also auch $\beta \supset$ Id. β ist nicht idempotent. $\hat{\beta} =: \mathcal{T}$ ist die assoziierte tonnelierte Topologie; Fix(β) enthält genau die tonnelierten Räume (vgl. auch ROBERT [102, p. 328]).

(10.14) Für $\mathcal{Z} = \delta \supset$ Id erhalten wir als $\hat{\delta} =: \mathcal{D}$, die assoziierte strikte MACKEY-Topologie. Fix(δ) fällt mit der Klasse der strikten MACKEY-Räume zusammen.

(10.15) Die angegebenen Beispiele sind Spezialfälle der folgenden Konstruktion:

Sei Me die Kategorie der Mengen und $\mathcal{N}$: LKX $\longrightarrow$ Me sei ein Funktor mit folgenden Eigenschaften: $\mathcal{N}(E,\mathcal{R}) \subset$ Pot(E') für alle $(E,\mathcal{R}) \in$ Ob(LKX), jedes $M \in \mathcal{N}(E,\mathcal{R})$ ist $\sigma(E',E)$-beschränkt; für $S \in$ Mor($(E,\mathcal{R}),(F,\mathcal{F})$) ist $\mathcal{N}(S): \mathcal{N}(F,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{N}(E,\mathcal{R})$ durch $\mathcal{N}(S)(M) := S^t(M)$ $(M \in \mathcal{N}(F,\mathcal{F}))$ definiert. Dann ist durch

$\mathcal{Z}(\mathcal{R}) :=$ Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Elementen aus $\mathcal{N}(E,\mathcal{R})$.

eine funktorielle Topologie in LKX gegeben. Ist $[\bigcup \mathcal{N}(E,\mathcal{R})]$ schwach dicht in E', so ist $\mathcal{Z}(\mathcal{R})$ separiert.

Bew.: Sei $S:(E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ linear und stetig und $V \in \mathcal{U}_0(\mathcal{Z}(\mathcal{F}))$. Dann gibt es ein $\varrho > 0$ und $M_1,\dots,M_n \in \mathcal{N}(F,\mathcal{F})$ mit $\varrho(\bigcap_{i=1}^n M_i^o) \subset V$. $M_1,\dots,M_n \in \mathcal{N}(F,\mathcal{F}) \Longrightarrow S^t(M_i) \in \mathcal{N}(E,\mathcal{R})$ $(i=1,\dots,n)$. $\Longrightarrow \varrho \bigcap_{i=1}^n (S^t(M_i))^o \in \mathcal{U}_0(\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$ und es gilt $\varrho \bigcap_{i=1}^n (S^t(M_i))^o = \varrho \bigcap_{i=1}^n S^{-1}(M_i^o) = \varrho\, S^{-1}(\bigcap_{i=1}^n M_i^o) = S^{-1}(\varrho \bigcap_{i=1}^n M_i^o) \subset S^{-1}(V)$. $\Longrightarrow$ $S^{-1}(V) \in \mathcal{U}_0(\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$, d.h. $S:(E,\mathcal{Z}(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,\mathcal{Z}(\mathcal{F}))$ ist stetig. ./.

(10.16) Die in (4.5) angegebenen Mengensysteme $\mathfrak{M}_i$ $(i=1,\dots,6)$

und das Mengensystem $\mathfrak{M}$ aus Satz (4.3) sind von der beschriebenen Art.

Für $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{N}_5, \mathfrak{N}_6$ kann man das direkt nachrechnen. Für $\mathfrak{N}_4$ kann man den Beweis so führen:

Sei $N \subset F$ beschränkt, die durch $\sigma(F,E)$ auf N induzierte Uniformität sei metrisierbar. $S:(H, \sigma(H,H')) \longrightarrow (E, \sigma(E,F))$ sei linear und stetig. Es ist zu zeigen, daß die durch $\sigma(H',H)$ auf $S^t(N)$ induzierte Uniformität metrisierbar ist, denn die Beschränktheit von $S^t(N)$ ist klar. Da $S^t:(F, \sigma(F,E)) \longrightarrow (H', \sigma(H',H))$ linear und stetig ist, existiert eine stetige lineare Fortsetzung $\tilde{S}^t: (\tilde{F}, \widetilde{\sigma(F,E)}) \longrightarrow (\tilde{H}', \widetilde{\sigma(H',H)})$. Sei N_1 der Abschluß von N in $(\tilde{F}, \widetilde{\sigma(F,E)})$. Dann ist $(N_1, \widetilde{\sigma(F,E)} \cap N_1)$ kompakt und metrisierbar, also ist auch $(\tilde{S}^t(N_1), \widetilde{\sigma(H',H)} \cap \tilde{S}^t(N_1))$ kompakt und metrisierbar (KALTON[71, p. 401, Lemma 1.2]). Mit $\widetilde{\sigma(H',H)} \cap S^t(N) = \sigma(H',H) \cap S^t(N)$ folgt daher die Behauptung.

Wir führen den Beweis noch für $\mathfrak{M}$ aus Satz (4.3).
Sei $S: (E,\mathfrak{R}) \longrightarrow (F,\mathfrak{F})$ linear und stetig. Es ist $S^t(M) \in \mathfrak{M}(E,\mathfrak{R})$ für alle $M \in \mathfrak{M}(F,\mathfrak{F})$ zu zeigen. Sei dazu $T:(m_o, \sigma(m_o,l^1)) \longrightarrow (E, \sigma(E,E'))$ linear und stetig. Dann ist auch $S \circ T:(m_o, \sigma(m_o,l^1)) \longrightarrow (F, \sigma(F,F'))$ stetig und linear. $\Longrightarrow$ $(S \circ T)^t(M)$ ist präkompakt in $(l^1, \|\cdot\|_1)$ für alle $M \in \mathfrak{M}(F,\mathfrak{F})$ nach Definition von $\mathfrak{M}(F,\mathfrak{F})$. $(S \circ T)^t(M) = T^t(S^t(M)) \Longrightarrow S^t(M) \in \mathfrak{M}(E,\mathfrak{R})$ für alle $M \in \mathfrak{M}(F,\mathfrak{F})$. ./.

<u>(10.17)</u> Setzt man in (10.9) für $\mathfrak{R}$ die Klasse der metrisierbaren Objekte aus $\mathfrak{K}$ ein, so erhält man für $\tilde{\mathfrak{R}}$ im Fall lokalkonvexer Räume gerade die Klasse der bornologischen lokalkonvexen Räume. Der zugehörige idempotente Funktor $\mathfrak{B}$ vom Typ (T) in LKX liefert die assoziierte bornologische Topologie (KÖTHE[80, p. 383 (4), p. 384 (2)]).

Wie WAELBROECK[133, p. 35, Rem. 1] bemerkt, kann man zeigen, daß jeder metrisierbare topologische lineare Raum $(E,\mathfrak{R})$ die lineare Finaltopologie bezüglich $i_B:([B],p_B) \hookrightarrow E$ ($B \subset E$, B ist $\mathfrak{R}$-beschränkt, $B = \Gamma(B)$), trägt. Damit folgt, daß $\tilde{\mathfrak{R}}$ im Fall topologischer linearer Räume genau die topologischen linearen Räume $(F,\mathfrak{F})$ enthält, deren Topologie $\mathfrak{F}$ mit der linearen Finaltopologie bezüglich $i_B:([B],p_B) \hookrightarrow F$ ($B \subset F$, B ist $\mathfrak{F}$-beschränkt, $B = \Gamma(B)$), zusammenfällt. Das sind genau die topologischen linearen Räume, deren Topologie mit der feinsten linearen Topologie $\mathfrak{T}$ zusammenfällt, die die gleichen absolutkonvexen beschränkten Mengen wie $\mathfrak{F}$ besitzt. Wir wollen diese Räume c-bornologisch nennen.

Der zugehörige idempotente Funktor $\mathcal{CB}$ in TLR liefert die assoziierte c-bornologische Topologie. Die Klasse der c-bornologischen Räume ist eine echte Teilklasse der linear-bornologischen Räume, wie folgendes Beispiel von TURPIN (vgl. WAELBROECK[133, p. 20]) zeigt: $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, versehen mit der feinsten linearen Topologie $\mathcal{F}$, für die die Menge $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ der Einheitsvektoren beschränkt ist, ist ein vollständiger linear-bornologischer Raum, der nicht c-bornologisch sein kann, da er nicht linear-tonneliert ist. Den Hinweis auf dieses Beispiel verdanke ich Herrn Pfister.

(10.18) Nimmt man in (10.9) für $\mathcal{R}$ die Klasse der vollständig metrisierbaren Objekte aus $\mathcal{K}$, so erhält man im Fall lokalkonvexer Räume für $\tilde{\mathcal{R}}$ gerade die Klasse der ultrabornologischen lokalkonvexen Räume. Der zugehörige idempotente Funktor $\mathcal{UB}$ liefert die assoziierte ultrabornologische Topologie (BOURBAKI[27, p. 34, ex. 11], KÖTHE[81, §35.7]).

(10.19) Das lineare Analogon zu der Topologie β^* aus (10.12) erhält man wie folgt: Ein Faden $(U_m; m \in \mathbb{N})$ in dem topologischen linearen Raum $(E, \mathcal{R})$ heiße bornivor, wenn jedes U_m bornivor ist; ebenso heiße $(U_m; m \in \mathbb{N})$ abgeschlossen, wenn jedes U_m abgeschlossen ist. Wir definieren zu der linearen Topologie $\mathcal{R}$ die Topologie $b^*(\mathcal{R})$ als obere Grenze aller halbmetrisierbaren linearen Topologien, die durch $\mathcal{R}$-abgeschlossene bornivore Fäden definiert werden. Mit dieser Definition sieht man leicht, daß b^* funktoriell ist. Abgeschlossene bornivore Fäden werden bei IYAHEN [66, p. 293] "bornivore Ultra-Tonnen" genannt. Für Räume aus $\mathrm{Fix}(b^*) \subset \mathrm{Ob}(\mathrm{TLR})$ werden Bezeichnungen wie "quasi-ultratonneliert" (IYAHEN[66, p. 300]) verwendet.

(10.20) Fordert man in (10.19) statt "bornivor" nur "absorbant", so erhält man das lineare Analogon zur Topologie β aus (10.13). Wir bezeichnen diese Topologie mit $b(\mathcal{R})$. Die Topologie $b(\mathcal{R})$ wird bei ADASCH[1, p. 135] "starke Topologie" genannt. Für Räume aus $\mathrm{Fix}(b) \subset \mathrm{Ob}(\mathrm{TLR})$ ist von ROBERTSON[105, p. 249] die Bezeichnung "ultratonneliert" verwendet worden.

Als Anwendung dieser abstrakten Bildungen auf summierbare Folgen wollen wir hier zeigen, daß der Raum $(m_o, \tau(m_o, l^1))$ in einem gewissen Sinn für TF-summierbare Folgen und funktorielle Topologien in LKX universell ist.

<u>(10.21) Satz.</u> Für einen Funktor $\mathcal{Z} \supset \mathrm{Id}$ vom Typ (T) in LKX sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $(\sigma(m_o,l^1),\mathcal{Z}(\tau(m_o,l^1)))$ ist ein ORLICZ-PETTIS-Paar.

(b) $\mathcal{Z}(\tau(m_o,l^1)) = \tau(m_o,l^1)$.

(c) Für jeden separierten lokalkonvexen Raum $(E,\mathcal{R})$ ist $(\mathcal{R},\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar.

<u>Beweis:</u>

<u>(a) $\Longrightarrow$ (b):</u> $\tau(m_o,l^1) \subset \mathcal{Z}(\tau(m_o,l^1)) \subset \mathcal{OP}(\sigma(m_o,l^1)) = \tau(m_o,l^1)$ nach (7.13a).

<u>(b) $\Longrightarrow$ (c):</u> Sei $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-TF-summierbare Folge in E. Dann ist $(x_n;n\in\mathbb{N})$ auch $\sigma(E,E')$-TF-summierbar und deshalb ist die durch $T(\chi_J) := \sum_{n\in J} x_n$ $(J\subset\mathbb{N})$ und lineare Fortsetzung definierte lineare Abbildung $T:(m_o,\sigma(m_o,l^1)) \longrightarrow (E,\sigma(E,E'))$ stetig (vgl. hierzu den Beweis von Satz (4.3)). Da $\mathcal{Z}$ in LKX funktoriell ist, ist auch $\mathcal{Z}\circ\tau$ funktoriell und man erhält die Stetigkeit von $T:(m_o,\mathcal{Z}(\tau(m_o,l^1))) \longrightarrow (E,\mathcal{Z}(\tau(E,E')))$. Damit ist auch $T:(m_o,\mathcal{Z}(\tau(m_o,l^1))) \longrightarrow (E,\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$ stetig und deshalb ist $(x_n;n\in\mathbb{N}) = (T(e_n);n\in\mathbb{N})$ auch $\mathcal{Z}(\mathcal{R})$-TF-summierbar.

<u>(c) $\Longrightarrow$ (a):</u> Nach (7.13a) bilden $\sigma(m_o,l^1)$ und $\tau(m_o,l^1)$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar. Setzt man $(E,\mathcal{R}) := (m_o,\tau(m_o,l^1))$, so folgt mit (c), daß $\tau(m_o,l^1)$ und $\mathcal{Z}(\tau(m_o,l^1))$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar bilden. Also ist auch $(\sigma(m_o,l^1),\mathcal{Z}(\tau(m_o,l^1)))$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar. ./.

Ein analoger Beweis zeigt, daß der Raum $(l^\infty,\tau(l^\infty,l^1))$ in obigem Sinn für BM-summierbare Folgen und verfeinernde funktorielle Topologien in LKX universell ist.

Nach Satz (5.7) ist η eine funktorielle Topologie in $\mathcal{K}$. Wir wollen hier an einem Beispiel zeigen, daß $\eta(\mathcal{R})$ i.a. nicht mit $\mathcal{R}$ vergleichbar ist.

<u>(10.22) Beispiel.</u> Sei $\mathcal{K} = \mathrm{LKX}$, $(E_1,\mathcal{R}_1) := (l^2,\sigma(l^2,l^2))$, $(E_2,\mathcal{R}_2) := (l^\infty,\tau(l^\infty,l^{\infty\prime}))$ und $(E,\mathcal{R}) := (E_1,\mathcal{R}_1)\times(E_2,\mathcal{R}_2)$.

Die Topologie $\beta(E_1,E_1') = \|\cdot\|_2$-Topologie ist separabel, also gilt

$$\eta(\mathcal{R}_1) = \eta(E_1,E_1') = \beta(E_1,E_1') \supsetneqq \mathcal{R}_1.$$

Die Topologie $\mathcal{R}_2 = \|\cdot\|_\infty$-Topologie ist metrisierbar und nicht separabel. Also gilt $\eta(\mathcal{R}_2) = \eta(E_2,E_2') \subsetneqq \mathcal{R}_2$.

Nach (10.1) ist $\eta(\mathcal{R}_1\times\mathcal{R}_2) = \eta(\mathcal{R}_1)\times\eta(\mathcal{R}_2)$ und mit den oben festgestellten Relationen folgt nun $\eta(\mathcal{R}) \not\subseteq \mathcal{R}$. ./.

§ 11 Die assoziierte Folgen-Topologie.

Analog zur assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie kann man zu jedem lokalkonvexen Raum (jedem topologischen linearen Raum, jeder kommutativen topologischen Gruppe) $(E,\mathcal{R})$ die feinste Topologie (in der jeweiligen Kategorie) betrachten, die die gleichen konvergenten Folgen wie die Ausgangstopologie $\mathcal{R}$ hat. Existenz, Eigenschaften und Beschreibungen dieser Topologie, die wir mit $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ bezeichnen wollen, findet man z.B. bei KISYNSKI[78], WEBB[134], DUDLEY[45] und bei SEGAL, KUNZE[117, p. 46 ff.]. Bei gleichem Ausgangsobjekt führt die Bildung der assoziierten Folgen-Topologie in den verschiedenen Kategorien i.a. zu verschiedenen Resultaten. Wie DUDLEY[47] und PFISTER (unveröffentlicht) gezeigt haben, ist - im Gegensatz zu der Bemerkung in SEGAL, KUNZE[117, p. 93/94] - die in der Kategorie der topologischen Räume zu einer linearen Topologie $\mathcal{R}$ gebildete Folgen-Topologie $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ nicht notwendig linear.

In §14 werden wir eine neue Beschreibung der assoziierten Folgen-Topologie als Spezialfall einer allgemeinen Konstruktion erhalten.

Im folgenden sei $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ stets die zu $\mathcal{R}$ (in der aus dem Zusammenhang ersichtlichen Kategorie) assoziierte Folgen-Topologie. Als Hilfsaussage notieren wir:

<u>(11.1) Satz.</u> Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ die zu $\mathcal{T}$ in der Kategorie der topologischen Räume assoziierte Folgen-Topologie und $A \subset X$. Dann gilt:

Ist $\mathcal{T} \cap A$ eine (A.1)-Topologie, so gilt $\mathcal{F}(\mathcal{T}) \cap A = \mathcal{T} \cap A$.

<u>Beweis:</u> Aus $\mathcal{F}(\mathcal{T}) \supset \mathcal{T}$ folgt $\mathcal{F}(\mathcal{T}) \cap A \supset \mathcal{T} \cap A$. Da $\mathcal{T} \cap A$ die Bedingung (A.1) erfüllt, genügt es für die umgekehrte Inklusion die Folgen-Stetigkeit der Abbildung $i_A : (A, \mathcal{T} \cap A) \longrightarrow (A, \mathcal{F}(\mathcal{T}) \cap A)$ zu zeigen und diese folgt unmittelbar daraus, daß $\mathcal{T}$ und $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ die gleichen konvergenten Folgen besitzen. ./.

<u>(11.2) Bemerkung.</u>
Ist $(X,\mathcal{T})$ eine kommutative topologische Gruppe (ein topologischer linearer Raum, ein lokalkonvexer Raum), so bleibt Satz (11.1) richtig, wenn man die assoziierte Folgen-Topologie in einer der Kategorien KTG (kommutative topologische Gruppen), TLR (topologische lineare Räume) bzw. LKX (lokalkonvexe Räume) bildet.

<u>(11.3) Satz.</u> In jeder der betrachteten Kategorien KTG, TLR und LKX gilt für separierte Topologien $\mathcal{R}$ die Inklusion

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{OP}(\mathcal{R}).$$

Beweis: Nach (2.5) ist die $\mathcal{R}$-TF-Summierbarkeit einer Folge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ zur $\mathcal{R}$-Konvergenz gewisser Folgen äquivalent. Die Bildung von $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ unterliegt daher einer geringeren Anzahl von Restriktionen, und man erhält $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{OP}(\mathcal{R})$. Die Inklusion $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}(\mathcal{R})$ folgt aus der Definition von $\mathcal{F}(\mathcal{R})$. ./.

(11.4) Bemerkungen.

(a) Einen anderen Beweis für "$\mathcal{F} \subset \mathcal{OP}$" erhält man mit (8.3) und (11.1). Bei Einführung der Notation (8.4) wurde nämlich festgestellt, daß $\mathcal{R} \cap K$ für alle $K \in \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ ein kompakter metrischer Raum ist.

Beim Beweis von Satz (11.3) ist es wesentlich, daß man bei der Definition der OP-Topologie nur TF-summierbare Folgen betrachtet hatte (vgl. (7.3a)). Das abstrakte Konzept läßt sich jedoch auch für Familien mit überabzählbarer Indexmenge realisieren.

(b) Wir wollen hier den Beweis für "$\mathfrak{N}_6 \subset \mathfrak{M}$" aus Korollar (4.5) nachtragen. Für jedes duale Paar $\langle E,F \rangle$ ist das System $\mathfrak{N}_6$ der begrenzten Mengen gesättigt und $\mathcal{T}(\mathfrak{N}_6)$ hat die gleichen Nullfolgen wie $\sigma(E,F)$, also auch die gleichen konvergenten Folgen. Man erhält daher aus Satz (11.3) die Inklusion $\sigma(E,F) \subset \mathcal{T}(\mathfrak{N}_6) \subset \mathcal{F}(\sigma(E,F)) \subset \mathcal{OP}(\sigma(E,F))$. $\sigma(E,F)$ und $\mathcal{T}(\mathfrak{N}_6)$ haben also die gleichen TF-summierbaren Folgen. Da $\mathcal{T}(\mathfrak{N}_6)$ eine polare Topologie zu $\langle E,F \rangle$ ist, folgt mit Satz (1.5) und Satz (3.4), daß $\sigma(E,F)$ und $\mathcal{T}(\mathfrak{N}_6)$ auch die gleichen TF-summierbaren Familien besitzen. Damit ist Korollar (4.5) vollständig bewiesen.

Mit obigem Beweis kann man leicht Sätze vom ORLICZ-PETTIS-Typ für lokalkonvexe Räume verschärfen: Sei $\mathcal{T}$ irgendeine polare Topologie zu dem dualen Paar $\langle E,F \rangle$ mit $\mathcal{T} \subset \mathcal{OP}(\sigma(E,F))$, z.B. $\mathcal{T} := \delta(E,F)$. Setzt man $\mathfrak{N} := \{A \subset F;$ Jede $\mathcal{T}$-Nullfolge konvergiert auf A gleichmäßig$\}$, so ist $\mathfrak{N}$ ein gesättigtes System beschränkter Teilmengen von F. $\mathcal{T}$ und die Topologie $\mathcal{T}(\mathfrak{N})$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen aus $\mathfrak{N}$ haben die gleichen konvergenten Folgen und man erhält wie oben die Inklusion $\sigma(E,F) \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathfrak{N}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{OP}(\mathcal{T})$. $\sigma(E,F)$ und $\mathcal{T}(\mathfrak{N})$ haben also die gleichen TF-summierbaren Folgen und damit auch die gleichen TF-summierbaren Familien.

(c) Eines der einfachsten Beispiele für $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \supsetneqq \mathcal{R}$ liefert der Raum $(l^1, \sigma(l^1, m_o))$. Nach Satz (4.1) haben $\sigma(l^1, m_o)$ und die $\|\cdot\|_1$-Topologie $\mathcal{T}$ auf l^1 die gleichen Nullfolgen, also auch die gleichen konvergenten Folgen. Da $\mathcal{T}$ metrisierbar ist, folgt $\mathcal{F}(\sigma(l^1, m_o)) = \mathcal{T}$.

Ein Beispiel für $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subsetneqq \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ haben wir bereits in (4.10)

kennengelernt. Dort war $\mathcal{F}(\tau(E,F)) \subsetneqq \delta(E,F) \subset \mathcal{OP}(\tau(E,F))$ realisiert. Ein weiteres Beispiel für $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subsetneqq \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ wird in (12.10) angegeben. Hier wollen wir eine hinreichende Bedingung dafür angeben, daß $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ gilt.

<u>(11.5) Definition.</u> Eine kommutative separierte topologische Gruppe $(E,\mathcal{R})$ erfüllt die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$, wenn es zu jeder Nullfolge $(x_n;n\in\mathbb{N})$ in $(E,\mathcal{R})$ eine Teilfolge $(x_{n(k)};k\in\mathbb{N})$ gibt, die $\mathcal{R}$-TF-summierbar ist.

<u>(11.6) Satz.</u> Jede vollständig metrisierbare kommutative topologische Gruppe erfüllt die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$.

<u>Beweis:</u> Sei $q: E \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Quasinorm auf der kommutativen Gruppe E, so daß die durch q bestimmte Gruppentopologie $\mathcal{R}$ auf E vollständig ist. $(x_n;n\in\mathbb{N})$ sei eine $\mathcal{R}$-Nullfolge. Dann gibt es eine Teilfolge $n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $q(x_{n(k)}) < 2^{-k}$ $(k\in\mathbb{N})$. Für alle $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ gilt dann:

$$q(\sum_{k\in\sigma} x_{n(k)}) \leq \sum_{k\in\sigma} q(x_{n(k)}) \leq \sum_{k\in\sigma} 2^{-k} \leq 2\cdot 2^{-\min\sigma} .$$

$(x_{n(k)};k\in\mathbb{N})$ erfüllt daher die $\mathcal{R}$-CAUCHY-Bedingung und mit der Vollständigkeit von $(E,\mathcal{R})$ folgt die Behauptung. ./.

<u>(11.7) Bemerkungen.</u>

(a) Nicht jeder vollständige lokalkonvexe Raum erfüllt die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$: In l^2 bilden die Einheitsvektoren $(e_n;n\in\mathbb{N})$ als Orthonormalsystem eine $\sigma(l^2,l^2)$-Nullfolge. Es kann jedoch keine TF-summierbare Teilfolge geben, denn diese müßte nach dem Satz von ORLICZ-PETTIS auch $\|\cdot\|_2$-TF-summierbar sein. Da jeder Folgen-abgeschlossene Teilraum eines Raumes der die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$ erfüllt, selbst die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$ erfüllt, kann die Vervollständigung $(l^{2*}, \sigma(l^{2*},l^2))$ von $(l^2, \sigma(l^2,l^2))$ nicht die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$ erfüllen.

(b) Nicht nur vollständig metrisierbare kommutative topologische Gruppen erfüllen die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$: In l^1 fallen die $\sigma(l^1,l^\infty)$-Nullfolgen mit den $\|\cdot\|_1$-Nullfolgen zusammen. Also enthält jede $\sigma(l^1,l^\infty)$-Nullfolge eine TF-summierbare Teilfolge.

(c) Aus dem Theorem von DIEUDONNÉ – SCHWARTZ (HORVÁTH[65, p. 161]) folgt, daß jeder lokalkonvexe strikte (LF)-Raum die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$ erfüllt.

(d) In Satz (11.6) genügt es zu fordern, daß die (in der Kategorie der kommutativen topologischen Gruppen gebildete) assoziierte Folgen-Topologie vollständig metrisierbar ist.

(e) Für vollständig metrisierbare topologische lineare Räume be-

weist man wie oben folgende schärfere Aussage:

Jede Nullfolge enthält eine BM-summierbare Teilfolge.

(f) Mit den Begriffen aus (3.11d) und Satz (11.6) erhält man: Ist jede Nullfolge in der kommutativen separierten topologischen Gruppe $(E,\mathcal{R})$ bereits stetiges homomorphes Bild einer Nullfolge in einer metrisierbaren kommutativen topologischen Gruppe und ist $(E,\mathcal{R})$ MACKEY-Folgen-vollständig, so erfüllt $(E,\mathcal{R})$ die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$.

<u>(11.8) Satz.</u> Für den separierten topologischen linearen Raum (den separierten lokalkonvexen Raum, die separierte kommutative topologische Gruppe) $(E,\mathcal{R})$ sei die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$ erfüllt. Dann gilt $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$, wobei sich sowohl $\mathcal{F}$ als auch $\mathcal{OP}$ auf die jeweilige Kategorie beziehen.

<u>Beweis:</u> Wegen (11.3) genügt es zu zeigen, daß die Abbildung $id_E: (E,\mathcal{F}(\mathcal{R})) \longrightarrow (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))$ stetig ist. Da $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ die assoziierte Folgen-Topologie ist, ist obige Abbildung genau dann stetig, wenn sie Folgen-stetig ist. Sei $(x_n;n\in\mathbb{N})$ eine $\mathcal{F}(\mathcal{R})$-Nullfolge. Wir nehmen an, daß $(x_n;n\in\mathbb{N})$ keine $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-Nullfolge ist. Dann gibt es eine $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-Nullumgebung U und eine Teilfolge $n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $x_{n(k)} \notin U$ für alle $k\in\mathbb{N}$. $(x_{n(k)};k\in\mathbb{N})$ ist aber eine $\mathcal{F}(\mathcal{R})$-Nullfolge, also auch eine $\mathcal{R}$-Nullfolge. Da $(E,\mathcal{R})$ die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$ erfüllt, gibt es eine Teilfolge $k: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, so daß $(x_{n\circ k(i)};i\in\mathbb{N})$ $\mathcal{R}$-TF-summierbar, also auch $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-TF-summierbar ist. Nach (2.2) gilt daher insbesondere $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n\circ k(i)} = 0$ in $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$. Dies ist ein Widerspruch zu $x_{n(k)} \notin U$ für alle $k\in\mathbb{N}$. $(x_n;n\in\mathbb{N})$ ist also eine $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$-Nullfolge. $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{OP}(\mathcal{R})$, d.h. $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$. ./.

Zwei Beispiele dafür, daß $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ gelten kann, ohne daß die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$ erfüllt ist, werden in (12.9) angegeben. Mit (11.6) und (11.7e) erhält man aus Satz (11.8):

<u>(11.9) Korollar.</u>

(a) Ist $(E,\mathcal{R})$ eine vollständig metrisierbare kommutative topologische Gruppe, so gilt $\mathcal{R} = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$.

(b) Ist $(E,\mathcal{R})$ ein vollständig metrisierbarer topologischer linearer Raum bzw. ein vollständig metrisierbarer lokalkonvexer Raum, so gilt sogar $\mathcal{R} = \mathcal{OP}(\mathcal{R}) = BM\mathcal{OP}(\mathcal{R})$.

Dabei bezieht sich die Bildung von $\mathcal{OP}$ bzw. $BM\mathcal{OP}$ stets auf die jeweilige Kategorie.

In §15 werden wir an Beispielen sehen, daß für lokalkonvexe Räume i.a. $\beta^* \not\subset \mathcal{OP}$ und damit auch $\mathcal{B} \not\subset \mathcal{OP}$ gilt, wobei $\mathcal{B}$ die in (10.17) definierte assoziierte bornologische Topologie ist und β^* wie in (10.12) definiert ist. Unter Zusatzvoraussetzungen erhält man jedoch Vergleichbarkeit.

Ein lokalkonvexer Raum $(E,\mathcal{R})$ erfüllt die MACKEY'sche Konvergenzbedingung, wenn jede $\mathcal{R}$-Nullfolge bereits eine MACKEY-Nullfolge ist (HORVÁTH[65, p. 285, ex. 6]).

Der lokalkonvexe separierte Raum $(E,\mathcal{R})$ erfülle nun die MACKEY'sche Konvergenzbedingung. Dann stimmt die feinste lokalkonvexe Topologie auf E, die die gleichen Nullfolgen wie $\mathcal{R}$ hat, also $\mathcal{F}(\mathcal{R})$, mit der feinsten lokalkonvexen Topologie auf E, die die gleichen MACKEY-Nullfolgen wie $\mathcal{R}$ hat, also $\mathcal{B}(\mathcal{R})$, überein (vgl. WEBB [134, p. 344]). Damit erhält man:

<u>(11.10) Satz.</u> Erfüllt der separierte lokalkonvexe Raum $(E,\mathcal{R})$ die MACKEY'sche Konvergenzbedingung, so gilt $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{OP}(\mathcal{R})$.

Ist $(E,\mathcal{R})$ ein lokalkonvexer (DF)-Raum, so haben $\beta^*(E,E')$ und $\mathcal{R}$ die gleichen konvergenten Folgen (GROTHENDIECK[58, p. 71]). Daraus erhält man:

<u>(11.11) Satz.</u> Für jeden separierten lokalkonvexen (DF)-Raum $(E,\mathcal{R})$ gilt $\mathcal{R} \subset \beta^*(E,E') \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{OP}(\mathcal{R})$.

Definiert man nicht notwendig lokalkonvexe (DF)-Räume nach LIGAUD[90] und interpretiert man b^* gemäß (10.19), so erhält man mit den Resultaten von PFISTER[96]:

Ist $(E,\mathcal{R})$ ein nicht notwendig lokalkonvexer (DF)-Raum, so haben $b^*(\mathcal{R})$ und $\mathcal{R}$ die gleichen konvergenten Folgen.
(Da $(E,\mathcal{R})$ ein (DF)-Raum ist, gilt nach PFISTER[96, p. 276 d)] $\mathcal{R} = m(b^*(\mathcal{R}),\mathcal{R})$. Nun setze man $t := \mathcal{R}$ und $s := b^*(\mathcal{R})$ im Beweis von Korollar 1 aus PFISTER[96, p. 283].)
Man erhält daher wie oben:

<u>(11.12) Satz.</u> Für jeden separierten topologischen linearen (DF)-Raum $(E,\mathcal{R})$ gilt $\mathcal{R} \subset b^*(\mathcal{R}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{OP}(\mathcal{R})$.
Dabei bezieht sich die Bildung von b^*, $\mathcal{F}$ und $\mathcal{OP}$ auf die Kategorie TLR.

§ 12 Die assoziierte ultrabornologische Topologie.

Durch die folgende Definition wird eine von BOURBAKI[27, p. 34, ex. 11] für lokalkonvexe Räume geschaffene Begriffsbildung verallgemeinert.

(12.1) Definition. Sei $\mathcal{K}$ eine der Kategorien KTG, TLR, LKX.
(a) $(E,\mathcal{R}) \in Ob(\mathcal{K})$ heißt ultrabornologisch, wenn $\mathcal{R}$ separiert ist und es eine Familie $((E_\iota,\mathcal{R}_\iota);\iota\in I)$ vollständig metrisierbarer $\mathcal{K}$-Objekte und eine Familie $T_\iota: E_\iota \longrightarrow E$ $(\iota\in I)$ von algebraischen $\mathcal{K}$-Morphismen so gibt, daß $\mathcal{R}$ die in $\mathcal{K}$ gebildete Finaltopologie bezüglich $T_\iota:(E_\iota,\mathcal{R}_\iota)\longrightarrow E$ $(\iota\in I)$ ist.
(Dieser Begriff hat nichts mit "ultrabornologisch" im Sinne von IYAHEN[66, p. 298] zu tun.)
(b) Den gemäß (10.6) zur Klasse der ultrabornologischen Objekte gebildeten idempotenten Funktor vom Typ (T) bezeichnen wir mit $\mathcal{UB}$ und nennen $\mathcal{UB}(\mathcal{R})$ die zu $\mathcal{R}$ (in $\mathcal{K}$) assoziierte ultrabornologische Topologie.

Mit den Bezeichnungen aus (10.9) ist $(E,\mathcal{R})$ genau dann ultrabornologisch, wenn $(E,\mathcal{R})\in\tilde{\mathcal{R}}$ gilt, wobei $\mathcal{R}$ die Klasse der vollständig metrisierbaren $\mathcal{K}$-Objekte ist.

(12.2) Satz.
(a) Für jede kommutative separierte topologische Gruppe $(E,\mathcal{R})$ gilt $\mathcal{OP}(\mathcal{R})\subset\mathcal{UB}(\mathcal{R})$.
(b) Für jeden separierten topologischen linearen Raum (jeden separierten lokalkonvexen Raum) gilt sogar $BM\mathcal{OP}(\mathcal{R})\subset\mathcal{UB}(\mathcal{R})$.

Dabei beziehen sich die Bildungen von $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$, $BM\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ und $\mathcal{UB}(\mathcal{R})$ stets auf die jeweilige Kategorie.

Beweis: Man erhält die Aussagen aus (11.9), (8.9) und (8.10). ./.

Mit (1.24a) erhält man aus (12.2):

(12.3) Korollar. $\mathcal{UB}(\sigma(m_o(I),\mathbb{K}^{(I)})) = \tau(m_o(I),m_o(I)^*)$.

(12.4) Bemerkung. Bei BOURBAKI[27, p. 35, Fußnote] wird die Frage nach der Existenz von bornologischen tonnelierten lokalkonvexen Räumen, die nicht ultrabornologisch sind, gestellt. VALDIVIA[132] hat eine Klasse solcher Räume konstruiert. Aus (12.3) ersieht man, daß $(m_o,\|\cdot\|_\infty)$ ein tonnelierter (GROTHENDIECK[59, p. 145, ex. 8]) normierter Raum ist, für den die assoziierte ultrabornologische Topologie die feinste lokalkonvexe Topologie ist (vgl. BATT, DIEROLF, VOIGT[16]).

Für topologische lineare Räume und für lokalkonvexe Räume existiert eine Beschreibung für $\mathcal{UB}$, die für spätere Anwendungen günstig ist.

(12.5) Definition. Eine beschränkte absolutkonvexe Teilmenge B eines topologischen linearen Raumes $(E,\mathcal{R})$ heißt BANACH-Scheibe, wenn $([B],p_B)$ ein BANACH-Raum ist.

(12.6) Satz. Ist $(E,\mathcal{R})$ ein separierter topologischer linearer Raum (bzw. ein separierter lokalkonvexer Raum), so stimmt $\mathcal{UB}(\mathcal{R})$ mit der in TLR (bzw. in LKX) gebildeten Finaltopologie bezüglich der Abbildungen $i_B: ([B],p_B) \hookrightarrow E$ (B eine BANACH-Scheibe in $(E,\mathcal{R})$) überein.

Beweis: Für lokalkonvexe Räume findet man dieses Resultat bei KÖTHE[81, § 35,8]. (Für die Äquivalenz der von KÖTHE[81, § 34,8] gegebenen Definition für ultrabornologisch mit (12.1) im Fall lokalkonvexer Räume beachte man, daß vollständig metrisierbare lokalkonvexe Räume ultrabornologisch im Sinne von KÖTHE[81, § 34,8] sind.) Für topologische lineare Räume folgt die Behauptung mit einem Resultat von WAELBROECK[133, p. 35, Prop. 11]. Dort wird gezeigt, daß jeder vollständig metrisierbare topologische lineare Raum $(F,\mathcal{T})$ die lineare Finaltopologie bezüglich der Abbildungen $i_B: ([B],p_B) \hookrightarrow F$ (B eine BANACH-Scheibe in $(F,\mathcal{T})$) trägt. Sei $\mathcal{Z}$ die lineare Finaltopologie auf E bezüglich der Abbildungen $i_B: ([B],p_B) \hookrightarrow E$ (B eine BANACH-Scheibe in $(E,\mathcal{R})$) und $\mathcal{T}$ irgendeine ultrabornologische Topologie auf E mit $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$. Mit der Transitivität der linearen Finaltopologie und dem oben zitierten Resultat von WAELBROECK erhält man, daß $\mathcal{T}$ die lineare Finaltopologie auf E bezüglich der Abbildungen $i_D: ([D],p_D) \hookrightarrow E$ (D eine BANACH-Scheibe in $(E,\mathcal{T})$) ist. Jede $\mathcal{T}$-BANACH-Scheibe ist jedoch wegen $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$ auch eine $\mathcal{R}$-BANACH-Scheibe, also gilt $\mathcal{Z} \subset \mathcal{T}$. Da $\mathcal{Z}$ selbst ultrabornologisch ist, folgt $\mathcal{Z} = \mathcal{UB}(\mathcal{R})$. ./.

In §14 werden wir eine neue Beschreibung für $\mathcal{UB}$ in der Kategorie der lokalkonvexen Räume als Spezialfall einer allgemeinen Konstruktion erhalten.

(12.7) Bemerkung.
In der feinsten lokalkonvexen Topologie sind alle beschränkten Mengen endlich dimensional (KELLEY, NAMIOKA[77, p. 53, Problem I]) und nach HORVÁTH[65, p. 207] ist jede absolutkonvexe schwach kompakte Menge eine BANACH-Scheibe. Mit Satz (12.6) und Korollar (12.3)

erhält man daher: Ist F ein linearer Teilraum von m_o^* mit $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subset F$, so sind alle $\sigma(m_o,F)$-kompakten absolutkonvexen Teilmengen von m_o endlichdimensional und daraus folgt $\tau(F,m_o) = \sigma(F,m_o)$ für jeden solchen Teilraum F. Insbesondere gilt also $\tau(l^1,m_o) = \sigma(l^1,m_o)$, was in (4.6a) bereits verwendet worden war.

Wir verwenden nun diese Begriffsbildungen zur Konstruktion einiger ergänzender Beispiele.

<u>(12.8) Beispiel.</u>

$H := \mathbb{R}^{[\mathbb{R}]} := \{ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \mathrm{card}(\mathrm{carr}(f)) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N}) \}$, $E := H + [e]$, wobei $e(r) := 1$ $(r \in \mathbb{R})$ ist. E trage die von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ induzierte Topologie $\mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ sei die Topologie der direkten Summe, $(E,\mathcal{T}) = (H,\mathcal{T} \cap H) \underset{top.}{+} [e]$.

<u>Beh.:</u> Jede $\mathcal{T}$-konvergente Folge $(f_n; n \in \mathbb{N})$ in E ist bereits $\mathcal{T}$-konvergent.

<u>Bew.:</u> $f_n = g_n + \lambda_n e$ mit $g_n \in H$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gibt also ein $J \subset \mathbb{R}$, J abzählbar, mit $g_n(x) = 0$ für alle $x \notin J$, $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus J$ gewählt. $\Longrightarrow f_n(x) = g_n(x) + \lambda_n = \lambda_n \longrightarrow \lambda$ in $\mathbb{R}$.
$\Longrightarrow$ $p: (E,\mathcal{T}) \longrightarrow [e]$, $g + \lambda e \longmapsto \lambda e$, ist Folgen-stetig.
Daraus erhält man $\mathcal{F}(\mathcal{T}) \supset \mathcal{T}$.
$(H,\mathcal{T} \cap H)$ ist nach EBERHARDT[51, p. 51, Korollar 1.6b] bornologisch. Da $(H,\mathcal{T} \cap H)$ Folgen-vollständig ist, ist $(H,\mathcal{T} \cap H)$ auch ultrabornologisch. $(E,\mathcal{T})$ ist daher als Produkt zweier ultrabornologischer Räume nach (10.1) ultrabornologisch (vgl. auch BOURBAKI[27, p. 35, ex. 11e]). Aus $\mathcal{T} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{F}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{UB}(\mathcal{T})$ erhält man daher $\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \mathcal{OP}(\mathcal{T}) = \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{T}) = \mathcal{UB}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.
Dieses Beispiel zeigt zusätzlich, daß man die assoziierte OP-Topologie i.a. nicht durch (evtl. transfinit) wiederholte Bildung polarer Topologien erreichen kann. Der Raum $(E,\mathcal{T})$ ist nämlich tonneliert, da $(H,\mathcal{T} \cap H)$ als ultrabornologischer Raum insbesondere tonneliert ist und $\overline{H}^{\mathcal{T}} = E$ gilt (vgl. GARNIR, DeWILDE, SCHMETS[53, p. 116]). Es ist daher $\mathcal{T} = \beta(E,E') \subsetneq \mathcal{T} = \mathcal{OP}(\mathcal{T})$.

<u>(12.9) Beispiele.</u> Wir zeigen hier an zwei Beispielen, daß die in (11.5) angegebene Bedingung (F-Σ) für das Bestehen der Gleichung $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ nicht notwendig ist. Nach obigen Resultaten genügt es, einen ultrabornologischen Raum $(E,\mathcal{R})$ anzugeben, der nicht die Bedingung (F-Σ) erfüllt.

(a) Sei $(X_\iota,\mathcal{T}_\iota) := (\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, Produkttopologie$)$ $(\iota \in \mathbb{N})$, $L_\iota := \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ $(\iota \in \mathbb{N})$. Nach S. DIEROLF[37, p. 40, Lemma 6] ist der Teilraum

$Y := \prod_{\iota\in\mathbb{N}} \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} + \coprod_{\iota\in\mathbb{N}} \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ von $\prod_{\iota\in\mathbb{N}} \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ultrabornologisch, da $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ als vollständig metrisierbarer lokalkonvexer Raum ultrabornologisch ist. Bezeichnet man die von $\prod_{\iota\in\mathbb{N}} \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ auf Y induzierte Topologie mit $\mathcal{Z}$, so gilt nach obigen Resultaten $\mathcal{UB}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} \subset \mathcal{F}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{OP}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{UB}(\mathcal{Z})$. Setzen wir $y^n_{\iota,\kappa} := \delta_{\kappa n}$ $(\iota,\kappa,n\in\mathbb{N})$, so ist durch $y^n := (y^n_{\iota,\kappa};\iota,\kappa\in\mathbb{N})$ $(n\in\mathbb{N})$ eine Nullfolge in $(Y,\mathcal{Z})$ gegeben, denn für $\iota,\kappa\in\mathbb{N}$ und $n > \kappa$ gilt $p_{\iota,\kappa}(y^n) = 0$. Sei nun $(y^{n(k)};k\in\mathbb{N})$ eine Teilfolge und $\iota,\kappa\in\mathbb{N}$. Dann erhält man:

$s_{\iota,\kappa} := \sum_{k\in\mathbb{N}} y^{n(k)}_{\iota,\kappa} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_{\kappa\, n(k)} \Longrightarrow s_{\iota,\kappa} = 1$ für $\kappa\in n(\mathbb{N})$, $s_{\iota,\kappa} = 0$ für $\kappa\notin n(\mathbb{N})$. In $\prod_{\iota\in\mathbb{N}} \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist die Folge $(y^{n(k)};k\in\mathbb{N})$ also summierbar zur Summe $s := (s_{\iota,\kappa};\iota,\kappa\in\mathbb{N})$. Dieses Element s liegt jedoch nicht in Y, denn es ist $s_{\iota,n(k)} \neq 0$ für alle ι, $k\in\mathbb{N}$.

(b) Ein weiteres Beispiel erhält man durch Modifikation eines Beispiels von WEBB[134, p. 344].

Sei $E := \prod_{\iota\in[0,1]} \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ die Produkttopologie. $(E,\mathcal{R})$ ist als bornologischer lokal vollständiger Raum ultrabornologisch. Die Menge M aller Folgen $(\alpha_n;n\in\mathbb{N})$ in $\mathbb{R}^+$ mit $\alpha_n \nearrow \infty$ $(n\longrightarrow\infty)$ hat die Kardinalität von $[0,1]$; sei $p:[0,1]\longrightarrow M$ eine Bijektion. Wir definieren die Folge $(x^n;n\in\mathbb{N})$ in E durch $x^n(\iota) := \alpha_n^{-1}$ $(\iota\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N})$, wobei $p(\iota) = (\alpha_n;n\in\mathbb{N})$ ist. Dann ist $(x^n;n\in\mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-Nullfolge. (Soweit ist dies die Konstruktion von WEBB.) Sei jetzt $n:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ eine Teilfolge. $(x^{n(j)};j\in\mathbb{N})$ ist genau dann summierbar, wenn für jedes $\iota\in[0,1]$ die Folge $x^{n(j)}(\iota) = \alpha^{-1}_{n(j)}$ $(j\in\mathbb{N})$ in $\mathbb{R}$ summierbar ist. Zu jeder Teilfolge $n:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ gibt es jedoch eine Folge $(\alpha^*_n;n\in\mathbb{N})$ in $\mathbb{R}^+$ mit $\alpha^*_{n(j)} = j$ $(j\in\mathbb{N})$, also auch ein $\iota\in[0,1]$ mit $p(\iota) = (\alpha^*_n;n\in\mathbb{N})$. Daher ist $(x^{n(j)};j\in\mathbb{N})$ für keine Teilfolge $n:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ summierbar in $(E,\mathcal{R})$. Der Raum $(E,\mathcal{R})$ erfüllt deshalb nicht die Bedingung $(F\text{-}\Sigma)$, obwohl er - im Gegensatz zum vorigen Beispiel - vollständig ist.

<u>(12.10) Beispiel.</u> Wir geben hier noch ein Beispiel für $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subsetneqq \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ an. Sei $E := F := \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Dann ist $\mathcal{R} := \sigma(E,F)$ metrisierbar, also gilt $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ nach Satz (11.1). Mit Beispiel (7.16) erhält man $\mathcal{OP}(\mathcal{R}) = \tau(E,E^*)$. In diesem Fall ist daher $\mathcal{R} = \mathcal{F}(\mathcal{R}) = \sigma(E,F) \subsetneqq \tau(E,E^*) = \mathcal{OP}(\mathcal{R})$.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir obige Begriffsbildun-

gen auf vektorwertige holomorphe Funktionen anwenden und dabei ein Resultat von BUNGART[31, p. 336] verallgemeinern.

<u>(12.11) Definition.</u> Sei $(E,\mathcal{R})$ ein separierter topologischer linearer Raum und $\Omega \neq \emptyset$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.
(a) $f:\Omega \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ heiße holomorph in Ω, wenn es zu jedem Punkt $z_o \in \Omega$ ein $r_o > 0$ und eine Folge $(x_n; n\in\mathbb{N}_o)$ in E so gibt, daß $((z-z_o)^n x_n; n\in\mathbb{N}_o)$ für alle $z\in K(z_o,r_o)\subset\Omega$ summierbar ist, $\Gamma(\{r_o^n x_n; n\in\mathbb{N}_o\})$ beschränkt ist und $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}_o}(z-z_o)^n x_n$ für alle $z\in K(z_o,r_o)$ gilt.

(b) Die Menge der holomorphen Abbildungen $f:\Omega\longrightarrow(E,\mathcal{R})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{H}(\Omega,(E,\mathcal{R}))$.

<u>(12.12) Bemerkung.</u> Für die von LABUDA[88] eingeführten topologischen linearen Räume mit der Eigenschaft (BMP), also insbesondere für lokal pseudo-konvexe Räume, ist die Beschränktheit von $\Gamma(\{r_o^n x_n; n\in\mathbb{N}_o\})$ keine echte zusätzliche Forderung. Ist in einem solchen Raum die Folge $((z-z_o)^n x_n; n\in\mathbb{N}_o)$ summierbar, so erfüllt diese Folge auch die BM-CAUCHY-Bedingung und deshalb ist $\Gamma(\{r^n x_n; n\in\mathbb{N}_o\})$ nach (1.20) für alle $r\in[0,|z-z_o|]$ sogar präkompakt. Bis jetzt ist mir kein Beispiel einer Folge $(x_n; n\in\mathbb{N}_o)$ in einem topologischen linearen Raum $(E,\mathcal{R})$ bekannt, für die ein $r_o > 0$ so existiert, daß die zu $(z^n x_n; n\in\mathbb{N}_o)$ gebildete Reihe für alle $z\in K(0,r_o)$ konvergent ist und trotzdem $\Gamma(\{r^n x_n; n\in\mathbb{N}_o\})$ für kein $r>0$ beschränkt ist.

Sei jetzt nur $B := \overline{\Gamma(\{r_o^n x_n; n\in\mathbb{N}_o\})}^{\mathcal{R}}$ für ein $r_o > 0$ beschränkt und p_B das MINKOWSKI-Funktional zu B. Dann ist $(x_n; n\in\mathbb{N}_o)$ eine Folge in $[B]$ und für $\sigma\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_o)$, $z\in K(0,r_o)$ gilt:

$$p_B\Big(\sum_{k\in\sigma} z^k x_k\Big) = p_B\Big(\sum_{k\in\sigma} r_o^k x_k \Big(\frac{z}{r_o}\Big)^k\Big) \leq \sum_{k\in\sigma}\Big|\frac{z}{r_o}\Big|^k p_B(r_o^k x_k) \leq \sum_{k\in\sigma}\Big|\frac{z}{r_o}\Big|^k$$
$$\leq \Big|\frac{z}{r_o}\Big|^{\min\sigma}\cdot\Big(1-\Big|\frac{z}{r_o}\Big|\Big)^{-1}.$$

Auf jeder kompakten Kreisscheibe $K[0,r]\subset K(0,r_o)$ erfüllt also $(z^k x_k; k\in\mathbb{N}_o)$ gleichmäßig die p_B-CAUCHY-Bedingung und mit Lemma (3.9) sehen wir, daß "MACKEY-Folgen-vollständig" im Sinne von (3.11d) hier der angemessene Vollständigkeitsbegriff ist.
Wir setzen daher von nun an voraus, daß der separierte topologische lineare Raum $(E,\mathcal{R})$ MACKEY-Folgen-vollständig im Sinne von (3.11d) ist. Dann ist $([B],p_B)$ ein BANACH-Raum und $f:K(z_o,r_o)\longrightarrow([B],p_B)$, $z\longmapsto\sum_{n\in\mathbb{N}_o}(z-z_o)^n x_n$, ist holomorph im Sinne von (12.11a). Gibt es um-

gekehrt zu jedem $z_o \in \Omega$ ein $r_o > 0$, einen BANACH-Raum $(F, \|\cdot\|)$, eine stetige lineare Abbildung $i_F: (F, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ und eine holomorphe Funktion $\hat{f}: K(z_o, r_o) \longrightarrow (F, \|\cdot\|)$ mit $f = i_F \circ \hat{f}$, so ist $f: \Omega \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ holomorph im Sinne von (12.11a). Damit haben wir den ersten Teil des folgenden Satzes bewiesen:

<u>(12.13) Satz.</u> Sei $(E, \mathcal{R})$ ein MACKEY-Folgen-vollständiger topologischer linearer Raum, $\mathcal{R}$ separiert und $\Omega \neq \emptyset$ sei eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Dann gilt:

(a) $f: \Omega \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ ist genau dann holomorph, wenn es zu jedem $z_o \in \Omega$ ein $r_o > 0$, einen BANACH-Raum $(F, \|\cdot\|)$, eine stetige lineare Abbildung $i_F: (F, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ und eine holomorphe Funktion $\hat{f}: K(z_o, r_o) \longrightarrow (F, \|\cdot\|)$ mit $f = i_F \circ \hat{f}$ auf $K(z_o, r_o)$ gibt.

(b) $\mathcal{H}(\Omega, (E, \mathcal{R})) = \mathcal{H}(\Omega, (E, \mathcal{UB}(\mathcal{R})))$.

<u>Beweis:</u> Es ist nur noch (b) zu zeigen. Wegen $\mathcal{UB}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{R}$ folgt "$\supset$" unmittelbar aus der Definition. Die Inklusion "$\subset$" folgt aus (12.13a), denn mit $i_F: (F, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ ist auch $i_F: (F, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \mathcal{UB}(\mathcal{R}))$ stetig. ./.

<u>(12.14) Bemerkungen.</u>

(a) Bei BUNGART[31, p. 336, Th. 16.2] wird gezeigt, daß zwei quasi-vollständige lokalkonvexe Topologien auf einem linearen Raum E, die die gleichen beschränkten Mengen besitzen, auch die gleichen holomorphen Funktionen besitzen.

(b) Mit Satz (12.13a) ist die Verbindung zu den vielseitigen Charakterisierungen holomorpher Funktionen mit Werten in Folgen-vollständigen lokalkonvexen Räumen bei BOCHNAK, SICIAK[20, p. 81, Th. 3.1] hergestellt, so daß diese Ergebnisse jetzt auch für nicht notwendig Folgen-vollständige nicht notwendig lokalkonvexe Räume verwendet werden können.

(c) Satz (12.13b) enthält insbesondere, daß für einen BANACH-Raum $(E, \|\cdot\|)$ die schwache Topologie $\sigma(E, E')$ und die $\|\cdot\|$-Topologie die gleichen holomorphen Funktionen besitzen. Dies wird manchmal mit einem "uniform boundedness"-Argument bewiesen (HILLE, PHILLIPS[62, p. 93, Th. 3.10.1]).

(d) Bei nicht notwendig MACKEY-Folgen-vollständigen topologischen linearen Räumen erhält man durch Überlegungen obiger Art ähnliche Resultate für die assoziierte c-bornologische Topologie $\mathcal{CB}$ (im Sinne von (10.17)) statt $\mathcal{UB}$. Man erreicht jedoch dann nur eine Reduktion auf den unhandlichen Fall holomorpher Funktionen mit Werten in normierten Räumen.

§ 13 Die assoziierte strikte MACKEY-Topologie und verwandte Konstruktionen.

Aus Korollar (4.5a) folgt, daß für jedes duale Paar $\langle E,F\rangle$ die Topologie $\delta(E,F)$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen $\sigma(F,E)$-kompakten Teilmengen von F zusammen mit der Topologie $\sigma(E,F)$ ein ORLICZ-PETTIS-Paar bildet. Nach (10.14) und (10.15) ist $\delta \supset \mathrm{Id}$ eine funktorielle Topologie in der Kategorie LKX und aus der Beschreibung der dazu gebildeten assoziierten strikten MACKEY-Topologie $\mathcal{D} := \hat{\delta}$ gemäß (10.5) erhält man:

(13.1) Satz. Für jeden separierten lokalkonvexen Raum $(E,\mathcal{R})$ gilt $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{OP}(\mathcal{R})$.

(13.2) Bemerkung. Eine Analyse der Beweise zu Satz (7.8) zeigt, daß die Aussagen (a), (b), (c) und (d) aus diesem Satz auch richtig sind, wenn man die assoziierte OP-Topologie $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ durch die assoziierte strikte MACKEY-Topologie $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ ersetzt.

(13.3) Beispiele.
(a) Aus (7.13a) erhält man $\tau(m_o,l^1) = \delta(m_o,l^1) = \mathcal{D}(\sigma(m_o,l^1)) = \mathcal{OP}(\sigma(m_o,l^1))$.
(b) Aus Satz (1.24b) erhält man mit der Tonneliertheit von $(m_o,\|\cdot\|_\infty)$ (GROTHENDIECK[59, p. 145, ex. 8]): $\|\cdot\|_\infty$-Topologie $= \beta(m_o,m_o') = \mathcal{D}(\beta(m_o,m_o')) \subsetneqq \mathcal{OP}(\beta(m_o,m_o')) = \tau(m_o,m_o^*)$.
(c) Bei WHEELER[135, p. 467, Th. 2.2] wird gezeigt, daß für jeden P-Raum X (= vollständig regulärer separierter Raum, in dem jedes G_δ offen ist.) der Raum $C_b(X) := \{f:X \longrightarrow \mathbb{R};\ f$ stetig und beschränkt$\}$, versehen mit der sogenannten strikten Topologie, ein strikter MACKEY-Raum ist.

Allgemeiner kann man mit jeder funktoriellen Topologie $\mathcal{Z}$ in einer der drei Kategorien KTG, TLR oder LKX, die $\mathrm{Id} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{OP}$ erfüllt, durch Übergang zur assoziierten funktoriellen Topologie $\hat{\mathcal{Z}}$ gemäß (10.5) den schärferen Satz $\mathrm{Id} \subset \hat{\mathcal{Z}} \subset \mathcal{OP}$ vom ORLICZ-PETTIS-Typ erhalten. In der Kategorie LKX kann man für $\mathcal{Z}$ z.B. auch die durch $\mathcal{Z}(\mathfrak{M})$ aus Satz (4.3) nach (10.16) bestimmte funktorielle Topologie einsetzen.

Die Topologie η aus §5 ist zwar nach (5.7a) funktoriell, sie verfeinert jedoch nicht notwendig, wie in Beispiel (10.22) gezeigt wurde. Nimmt man jedoch die obere Grenze $\eta \vee \mathrm{Id}$ (bzw. $\eta \vee \delta$ in der Kategorie LKX), so erhält man wieder eine verfeinernde funktorielle Topologie und das oben beschriebene Verfahren ist anwendbar.

§ 14 Verallgemeinerung der in § 8 durchgeführten Konstruktion; Eigenschaften vom Typ "lokaltopologisch".

Sei $\mathcal{K}$ eine der Kategorien KTG, TLR, LKX; Me sei die Kategorie der Mengen und $\mathcal{M}:\mathcal{K} \longrightarrow$ Me sei ein Funktor mit folgenden Eigenschaften: Für alle $(E,\mathcal{R}) \in Ob(\mathcal{K})$ ist $\mathcal{M}(E,\mathcal{R}) \subset Pot(E)$; für $(F,\mathcal{F}) \in Ob(\mathcal{K})$ und $S \in Mor((E,\mathcal{R}),(F,\mathcal{F}))$ ist $\mathcal{M}(S)(M) = S(M)$ $(M \in \mathcal{M}(E,\mathcal{R}))$. Dann gilt insbesondere:

$$(\mathcal{M}.1) \quad \begin{cases} (E,\mathcal{R}),\ (F,\mathcal{F}) \in Ob(\mathcal{K}),\ S \in Mor((E,\mathcal{R}),(F,\mathcal{F})) \\ \Longrightarrow\ S(\mathcal{M}(E,\mathcal{R})) \subset \mathcal{M}(F,\mathcal{F}). \end{cases}$$

In der Kategorie der separierten lokalkonvexen Räume hat man z.B.:

$\mathcal{M}(E,\mathcal{R}) := \{A \subset E;\ A$ ist $\mathcal{R}$-kompakt$\}$.

$\mathcal{M}(E,\mathcal{R}) := \{A \subset E;\ A$ ist $\mathcal{R}$-präkompakt$\}$.

$\mathcal{M}(E,\mathcal{R}) := \{A \subset E;\ A$ ist $\mathcal{R}$-Folgen-kompakt$\}$.

$\mathcal{M}(E,\mathcal{R}) := \{A \subset E;\ A$ ist $\mathcal{R}$-kompakt und konvex$\}$.

$\mathcal{M}(E,\mathcal{R}) := \{A \subset E;\ A$ ist beschränkt$\}$.

$\mathcal{M}(E,\mathcal{R}) := \{A \subset E;\ (A,\mathcal{R} \cap A)$ ist kompakt und metrisierbar$\}$.

(Bei KALTON[71, p. 401] wird gezeigt, daß das stetige separierte Bild eines kompakten metrischen Raumes wieder kompakt und metrisierbar ist.)

$\mathcal{M}(E,\mathcal{R}) := \mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ mit $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ aus (8.1).

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß $\mathcal{M}:\mathcal{K} \longrightarrow$ Me ein Funktor der oben beschriebenen Art ist.

(14.1) Definition.

(a) Seien $(E,\mathcal{R}),\ (F,\mathcal{F}) \in Ob(\mathcal{K})$. Ein algebraischer $\mathcal{K}$-Morphismus $S: E \longrightarrow F$ heißt $\mathcal{M}$-stetig, wenn $S|M: (M,\mathcal{R} \cap M) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ für alle $M \in \mathcal{M}(E,\mathcal{R})$ stetig ist.

(b) $(E,\mathcal{R}) \in Ob(\mathcal{K})$ hat die Eigenschaft $(\mathcal{M})$ (ist $\mathcal{M}$-bestimmt), wenn für jedes $(F,\mathcal{F}) \in Ob(\mathcal{K})$ jeder $\mathcal{M}$-stetige algebraische $\mathcal{K}$-Morphismus $S: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ bereits stetig ist.

Wie in Satz (8.9) zeigt man, daß die Klasse der $\mathcal{K}$-Objekte mit der Eigenschaft $(\mathcal{M})$ gegenüber Finalbildungen in $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist. Wir ordnen nun dem Funktor $\mathcal{M}$ zwei funktorielle Topologien in $\mathcal{K}$ (im Sinne von § 10) zu, wobei wir Satz (8.3) und Satz (8.10) verallgemeinern.

<u>(14.2) Satz.</u> Sei $\mathcal{M}:\mathcal{K}\longrightarrow \mathrm{Me}$ ein Funktor der oben beschriebenen Art und $(E,\mathcal{R})\in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$.
(a) Unter allen $\mathcal{K}$-Topologien $\mathcal{T}$ auf E mit $\mathcal{T}\cap M\subset \mathcal{R}\cap M$ für alle $M\in\mathcal{M}(E,\mathcal{R})$ gibt es eine feinste, die wir mit $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R})$ bezeichnen.
(b) Unter allen $\mathcal{K}$-Topologien $\mathcal{T}\supset\mathcal{R}$ auf E, die die Eigenschaft $(\mathcal{M})$ besitzen, gibt es eine gröbste, die wir mit $\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R})$ bezeichnen.
$\mathcal{M}^{\vee}$ und $\mathcal{M}^{\wedge}$ sind verfeinernde funktorielle Topologien in $\mathcal{K}$ im Sinne von § 10.

<u>Beweis:</u> Für die Aussagen (a) und (b) kann man direkt die Beweise zu den Sätzen (8.3) und (8.10) übernehmen.
Seien jetzt $(E,\mathcal{R}),(F,\mathcal{Z})\in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ und $S:(E,\mathcal{R})\longrightarrow(F,\mathcal{Z})$ sei ein $\mathcal{K}$-Morphismus. Für jedes $N\in\mathcal{M}(F,\mathcal{Z})$ ist nach (a) die Abbildung $j_N:(N,\mathcal{Z}\cap N)\hookrightarrow(F,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{Z}))$ stetig. Wegen $(\mathcal{M}.1)$ gilt $S(M)\in\mathcal{M}(F,\mathcal{Z})$ für alle $M\in\mathcal{M}(E,\mathcal{R})$. Mit der Inklusion $i_M: M\hookrightarrow E$ ist daher für jedes $M\in\mathcal{M}(E,\mathcal{R})$ die Abbildung $S\circ i_M:(M,\mathcal{R}\cap M)\longrightarrow(F,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{Z}))$ stetig. Ist $\mathcal{T}:=S^{-1}(\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{Z}))$ die Initialtopologie auf E bezüglich S, so folgt daraus $\mathcal{T}\cap M\subset\mathcal{R}\cap M$ für alle $M\in\mathcal{M}(E,\mathcal{R})$, also $\mathcal{T}\subset\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R})$ und damit die Stetigkeit von $S:(E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}))\longrightarrow(F,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{Z}))$.

Da $\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R})\supset\mathcal{R}$ gilt, ist $S:(E,\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}))\longrightarrow(F,\mathcal{Z})$ stetig. Sei $\mathcal{F}$ die in $\mathcal{K}$ gebildete Finaltopologie auf F bezüglich $S:(E,\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}))\longrightarrow F$. Da die Eigenschaft $(\mathcal{M})$ finalinvariant ist, hat $\mathcal{F}$ die Eigenschaft $(\mathcal{M})$ und es ist $\mathcal{F}\supset\mathcal{Z}$. Also gilt auch $\mathcal{F}\supset\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{Z})$ und man erhält die Stetigkeit von $S:(E,\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}))\longrightarrow(F,\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{Z}))$. ./.

Neben $(\mathcal{M}.1)$ betrachten wir eine weitere Bedingung, die von vielen Funktoren $\mathcal{M}$ erfüllt wird, nämlich:

$(\mathcal{M}.2)$ $\quad \mathcal{M}(E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}))\supset\mathcal{M}(E,\mathcal{R})$ für alle $(E,\mathcal{R})\in\mathrm{Ob}(\mathcal{K})$.

$(\mathcal{M}.2)$ bedeutet: Das Mengensystem $\mathcal{M}(E,\mathcal{R})$ ändert sich nicht, wenn man unter der Nebenbedingung $\mathcal{T}\cap M=\mathcal{R}\cap M$ für alle $M\in\mathcal{M}(E,\mathcal{R})$ zu einer feineren $\mathcal{K}$-Topologie $\mathcal{T}$ übergeht. Aus $(\mathcal{M}.1)$ folgt nämlich mit $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R})\supset\mathcal{R}$ die Inklusion $\mathcal{M}(E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}))\subset\mathcal{M}(E,\mathcal{R})$. Wir werden an Beispielen zeigen, daß diese Inklusion echt sein kann. Die Begründung für die Einführung der Bedingung $(\mathcal{M}.2)$ liegt in dem folgenden Satz.

<u>(14.3) Satz.</u>
(a) In der Situation von Satz (14.2) gilt stets $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R})\subset\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R})$.

(b) Erfüllt $\mathcal{M}$ die Bedingung $(\mathcal{M}.2)$, so gilt $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R})$.

Beweis:

Zu (a): Da $\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R})$ die Eigenschaft $(\mathcal{M})$ besitzt, genügt es zu zeigen, daß $id_E:(E,\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R})) \longrightarrow (E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}))$ $\mathcal{M}$-stetig ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}) \cap M \supset \mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M$ für alle $M \in \mathcal{M}(E,\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}))$ erfüllt ist. Wegen $\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{R}$ folgt aus $(\mathcal{M}.1)$ $\mathcal{M}(E,\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R})) \subset \mathcal{M}(E,\mathcal{R})$ und für alle $H \in \mathcal{M}(E,\mathcal{R})$ gilt $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}) \cap H = \mathcal{R} \cap H$. Man erhält also $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M = \mathcal{R} \cap M$ für alle $M \in \mathcal{M}(E,\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}))$. Mit $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R})$ folgt $\mathcal{R} \cap M \subset \mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}) \cap M$ für alle $M \in \mathcal{M}(E,\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}))$, so daß man zusammen $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M \subset \mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}) \cap M$ für alle $M \in \mathcal{M}(E,\mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}))$ erhält.

Zu (b): Es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R})$ die Eigenschaft $(\mathcal{M})$ besitzt. Sei dazu $S:(E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,\mathcal{Z})$ ein $\mathcal{M}$-stetiger algebraischer $\mathcal{K}$-Morphismus. Dann ist $S|M:(M,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M) \longrightarrow (F,\mathcal{Z})$ für alle $M \in \mathcal{M}(E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R})) = \mathcal{M}(E,\mathcal{R})$ (wegen $(\mathcal{M}.2)$) stetig. Mit $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M = \mathcal{R} \cap M$ $(M \in \mathcal{M}(E,\mathcal{R}))$ folgt die Stetigkeit von $S|M:(M,\mathcal{R} \cap M) \longrightarrow (F,\mathcal{Z})$ für alle $M \in \mathcal{M}(E,\mathcal{R})$. Daraus folgt $S^{-1}(\mathcal{Z}) \cap M = (S|M)^{-1}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{R} \cap M$ für alle $M \in \mathcal{M}(E,\mathcal{R})$, also $S^{-1}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R})$ und damit die Stetigkeit von $S:(E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R})) \longrightarrow (F,\mathcal{Z})$.

(14.4) Beispiele.

(a) Sei $\mathcal{K} := TLR$ und $\mathcal{M}(E,\mathcal{R}) := \{M \subset E;\ \dim[M] < \infty$, für alle $U \in \mathcal{U}_0(E,\mathcal{R})$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M \subset U+\ldots+U$ (n Summanden)$\}$.

Man sieht leicht, daß $(\mathcal{M}.1)$ erfüllt ist. Sei $(E,\mathcal{R})$, $E \neq \{0\}$, irgendein separierter topologischer linearer Raum, der additiv beschränkt ist, d.h. $\forall$ $U \in \mathcal{U}_0(E,\mathcal{R})$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ mit $E \subset U+\ldots+U$ (n Summanden). Der Raum der (Äquivalenzklassen der) LEBESGUE-meßbaren Funktionen auf $[0,1] \subset \mathbb{R}$ mit der Topologie der Konvergenz nach Maß (vgl. DUNFORD, SCHWARTZ[50, p. 104 ff.]) ist ein Beispiel eines solchen Raumes. $\mathcal{M}(E,\mathcal{R})$ enthält dann genau alle endlich dimensionalen Teilräume von E und deren Teilmengen. Da $\mathcal{R}$ separiert ist, induziert $\mathcal{R}$ auf den endlich dimensionalen Teilräumen die übliche Topologie und man erhält für $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R})$ die feinste lineare Topologie auf E. Sei $U \subset E$ absolutkonvex und absorbant und $\{0\}$ sei der einzige in U enthaltene lineare Teilraum. Man kann etwa $U := \Gamma(\{x_\iota;\ \iota \in I\})$ setzen, wobei $(x_\iota;\ \iota \in I)$ eine HAMEL-Basis von E ist. Dann ist U eine Nullumgebung für die feinste lokalkonvexe Topologie auf E, also gilt insbesondere $U \in \mathcal{U}_0(E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}))$ und man sieht, daß $\mathcal{M}(E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}))$ keine von $\{0\}$ ver-

schiedenen linearen Teilräume enthält. In diesem Beispiel ist daher $\mathcal{M}(E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R})) \subsetneqq \mathcal{M}(E,\mathcal{R})$. Trotzdem gilt $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R})$, wie (14.3a) zeigt.

Das folgende Beispiel stammt von S. DIEROLF.

(b) Sei wieder $\mathcal{K} := \mathrm{TLR}$ und $\mathcal{M}(E,\mathcal{R}) := \mathrm{Pot}(\overline{\{0\}}^{\sigma(E,E')})$ für alle $(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{TLR})$. Man sieht wieder leicht, daß $(\mathcal{M}.1)$ erfüllt ist. λ sei das LEBESGUE-Maß auf $\mathbb{R}$, $F := L^{1/2}(\mathbb{R},\lambda)$. $\mathcal{T}$ sei die durch $q(f) := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{1/2}\, d\lambda(x)$ $(f \in L^{1/2}(\mathbb{R},\lambda))$ induzierte Topologie auf F. $(F,\mathcal{T})$ enthält einen linearen Teilraum G, so daß $(G,\mathcal{T}\cap G)$ topologisch isomorph zu $(l^{1/2},\|\cdot\|_{1/2})$ ist. Man kann z.B. $G := \overline{[\{\chi_{[2n,2n+1]};n\in\mathbb{N}\}]}^{\mathcal{T}}$ wählen.

Sei $(H,\mathcal{F}) := (F,\mathcal{T})\times(F,\sigma(F,F^*))$, $\Delta_F := \{(x,x)\in H;\ x\in F\}$ und $E := \Delta_F \dotplus G\times\{0\}$. Wir zeigen, daß $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{F}\cap E)$ nicht die Eigenschaft $(\mathcal{M})$ besitzt. Folglich gilt $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{F}\cap E) \subsetneqq \mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{F}\cap E)$ und $\mathcal{M}$ erfüllt insbesondere nicht $(\mathcal{M}.2)$.
Sei $\mathcal{S}$ eine lineare Topologie auf F, die gröber als $\mathcal{T}$ und gröber als $\sigma(F,F^*)$ ist; $U \in \mathcal{U}_0(F,\mathcal{S})$ sei abgeschlossen. Da U insbesondere eine $\sigma(F,F^*)$-Nullumgebung ist, enthält U einen endlich kodimensionalen linearen Teilraum L von F. Wegen $(F,\mathcal{T})' = \{0\}$ gilt $\overline{L}^{\mathcal{T}} = F$ und somit $U = \overline{U}^{\mathcal{S}} = F$. Die lineare untere Grenze $\mathcal{T} \overset{lin}{\wedge} \sigma(F,F^*)$ ist also die gröbste Topologie auf F.

$$\varphi : (H/\Delta_F, \mathcal{F}/\Delta_F) \longrightarrow (F, \mathcal{T} \overset{lin}{\wedge} \sigma(F,F^*)),\ (x,y)+\Delta_F \longmapsto x - y$$

$(x,y\in F)$, ist ein topologischer Isomorphismus, denn für $U \in \mathcal{U}_0(F,\mathcal{T})$ und $V \in \mathcal{U}_0(F,\sigma(F,F^*))$ gilt $\varphi(U\times V+\Delta_F) = U - V$. Folglich ist $\mathcal{F}/\Delta_F$ die gröbste Topologie auf H/Δ_F und es ist $\overline{\Delta_F}^{\mathcal{F}} = H$.

Sei $x\in G$ und $f\in(E,\mathcal{F}\cap E)'$. Wegen $\overline{E}^{\mathcal{F}} = H$ gibt es ein $\tilde{f}\in(H,\mathcal{F})'$ mit $\tilde{f}|E = f$. Offenbar ist $\tilde{f}(x,0) = 0$. Es folgt $G\times\{0\} \subset \overline{\{0\}}^{\sigma(E,E')}$. Ist $x\in F\setminus\{0\}$, so gibt es ein $g\in F^*$ mit $g(x)\neq 0$. $\tilde{g}\in H^*$ definiert durch $\tilde{g}(y,z) := g(z)$ $(y,z\in F)$ ist stetig bezüglich $\mathcal{F}$ und $\tilde{g}(x,x) = g(x) \neq 0$. Folglich hat man $G\times\{0\} = \overline{\{0\}}^{\sigma(E,E')}$.
$(E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{F}\cap E))$ ist nunmehr topologisch direkte Summe von $(G,\mathcal{T}\cap G)\times\{0\}$ und Δ_F mit der feinsten linearen Topologie. Da $(G,\mathcal{T}\cap G)\times\{0\}$ trennendes stetiges Dual hat, folgt weiter, daß $\mathcal{M}(E,\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{F}\cap E)) = \{0\}$ ist. Da $\mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{F}\cap E)$ nicht die feinste lineare Topologie ist, folgt die Behauptung.

Der folgende einfache Satz zeigt, wie man die Funktoren $\mathcal{M}$ zum Beweis von Sätzen vom ORLICZ-PETTIS-Typ verwenden kann.

(14.5) Satz. Sind $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 : \mathcal{K} \longrightarrow \mathrm{Me}$ Funktoren der oben beschriebenen Art und gilt $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, d.h. $\mathcal{M}_1(E,\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_2(E,\mathcal{R})$ für alle $(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$, so folgt:

(a) $\mathcal{M}_1^{\vee} \supset \mathcal{M}_2^{\vee}$.

(b) $\mathcal{M}_1^{\wedge} \supset \mathcal{M}_2^{\wedge}$.

Ist insbesondere für jedes $(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ mit separiertem $\mathcal{R}$ das Mengensystem $\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ in $\mathcal{M}(E,\mathcal{R})$ enthalten, so gilt

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{M}^{\vee}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}^{\wedge}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{OP}(\mathcal{R})$$

für jedes $(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$, für das $\mathcal{R}$ separiert ist.

Beweis: Diese Aussagen liest man unmittelbar aus den Definitionen ab. ./.

Aus den funktoriellen Eigenschaften der Topologien $\mathcal{M}^{\vee}$ und $\mathcal{M}^{\wedge}$ erhält man wieder die üblichen Aussagen über Produkte, Teilräume, Quotienten und Summen.

Im verbleibenden Teil dieses Paragraphen wollen wir einige typische Beispiele durchrechnen. Dabei ergeben sich sowohl neue Sätze vom ORLICZ-PETTIS-Typ, als auch neue Darstellungen bereits bekannter assoziierter Topologien. Wir beschränken uns dabei auf separierte Topologien. Die im folgenden angegebenen Funktoren sind also nur auf der Unter-Kategorie der separierten Objekte definiert.

(14.6) Beispiele. Hier stellen wir Beispiele für Funktoren $\mathcal{M}$ zusammen, die unmittelbar Sätze vom ORLICZ-PETTIS-Typ liefern.

(a) $\mathcal{M}_1(E,\mathcal{R}) := \{M \subset E;\ \mathcal{R} \cap M$ ist kompakt und metrisierbar$\}$.

Wie schon mehrfach erwähnt wurde, wird bei KALTON[71, p. 401] gezeigt, daß das stetige separierte Bild eines kompakten metrischen Raumes wieder kompakt und metrisierbar ist. Damit ist $(\mathcal{M}.1)$ erfüllt. Wegen $\mathcal{R} \cap M = \mathcal{M}_1^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M$ ist $\mathcal{M}_1^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M$ für alle $M \in \mathcal{M}_1(E,\mathcal{R})$ kompakt und metrisierbar. Daher ist auch $(\mathcal{M}.2)$ erfüllt.

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{M}_1^{\vee}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_1^{\wedge}(\mathcal{R}) = \mathcal{F}(\mathcal{R})$ gilt, wobei $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ die zu $\mathcal{R}$ assoziierte Folgen-Topologie ist. Aus Satz (11.1) erhält man unmittelbar $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_1^{\vee}(\mathcal{R})$. Für die umgekehrte Inklusion genügt es, die Folgen-Stetigkeit der Abbildung $\mathrm{id}_E : (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (E,\mathcal{M}_1^{\vee}(\mathcal{R}))$ zu beweisen. Sei dazu $(x_n; n \in \mathbb{N})$ eine Folge in E, die gegen $x_o \in E$ konvergiert. Dann ist $M := \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_o\}$ stetiges separiertes Bild von $(\{n^{-1}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) \subset \mathbb{R}$, und

daher ist $(M,\mathcal{R}\cap M)$ kompakt und metrisierbar. Es folgt $\mathcal{R}\cap M = \mathcal{M}_1^{\vee}(\mathcal{R})\cap M$, d.h. $(x_n;n\in\mathbb{N})$ ist auch $\mathcal{M}_1^{\vee}(\mathcal{R})$-konvergent gegen x_0.

Die Eigenschaft $(\mathcal{M}_1)$ ist daher äquivalent zu der Eigenschaft

$(\mathcal{M}_1')$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Für jedes } (F,\mathcal{F})\in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}) \text{ ist jeder Folgen-stetige}\\ \text{algebraische } \mathcal{K}\text{-Morphismus } S:(E,\mathcal{R})\longrightarrow(F,\mathcal{F})\\ \text{bereits stetig.}\end{array}\right.$

Räume mit der Eigenschaft $(\mathcal{M}_1')$ werden bei DUDLEY[45, p. 486] "sequential" (Folgen-bestimmt) genannt.

Wir notieren hier noch eine weitere Darstellung der assoziierten Folgen-Topologie:

$\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \bigvee\{\mathcal{T}\,;\ \mathcal{T}$ ist eine $\mathcal{K}$-Topologie auf E, $\mathcal{T}\cap M\subset\mathcal{R}\cap M$ für alle $M\subset E$, für die $\mathcal{R}\cap M$ metrisierbar (bzw. eine (A.1)-Topologie) ist$\}$.

<u>Bew.:</u> Man sieht unmittelbar $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_1^{\vee}(\mathcal{R})\supset\bigvee\{\ldots\}$. In Satz (11.1) wurde $\mathcal{F}(\mathcal{R})\in\{\ldots\}$ gezeigt, also gilt auch $\mathcal{F}(\mathcal{R})\subset\bigvee\{\ldots\}$. ./.

<u>(b)</u> $\mathcal{M}_2(E,\mathcal{R}) := \{M\subset E;\ \mathcal{R}\cap M$ ist kompakt$\}$.
Man sieht unmittelbar, daß $(\mathcal{M}.1)$ und $(\mathcal{M}.2)$ erfüllt sind. Die Eigenschaft $(\mathcal{M}_2)$ wurde für lokalkonvexe Räume bei PORTA[99] unter der Bezeichnung "compactly determined" behandelt. In der Kategorie der topologischen Räume sind die Objekte mit der Eigenschaft $(\mathcal{M}_2)$ unter dem Namen k-Räume (vgl. etwa KELLEY[76, p. 230]) wohlbekannt.

<u>(c)</u> $\mathcal{M}_3(E,\mathcal{R}) := \{M\subset E;$ Die durch $\mathcal{R}$ auf M induzierte Uniformität ist präkompakt$\}$.
Es ist leicht zu sehen, daß $(\mathcal{M}.1)$ erfüllt ist. Zum Beweis dafür, daß auch $(\mathcal{M}.2)$ erfüllt ist, wollen wir Satz (9.6) verwenden. Sei dazu $M\in\mathcal{M}_3(E,\mathcal{R})$, o.E. $0\in M$. Wir setzen $M_1 := M$, $M_{n+1} := M_n - M_n$ $(n\in\mathbb{N})$. Wegen $M_n\in\mathcal{M}_3(E,\mathcal{R})$ $(n\in\mathbb{N})$ ist $\mathcal{R}\cap M_n = \mathcal{M}_3^{\vee}(\mathcal{R})\cap M_n$ $(n\in\mathbb{N})$, also ist für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Abbildung $i_n:(M_n,\mathcal{R}\cap M_n)\longrightarrow(E,\mathcal{M}_3^{\vee}(\mathcal{R}))$, $i_n(x) := x$ $(x\in M_n)$, stetig und daher gleichmäßig stetig nach Satz (9.6). Insbesondere ist also die durch $\mathcal{M}_3^{\vee}(\mathcal{R})$ auf M induzierte Uniformität gröber als die durch $\mathcal{R}$ auf M induzierte Uniformität. Für jedes $M\in\mathcal{M}_3(E,\mathcal{R})$ ist damit die durch $\mathcal{M}_3^{\vee}(\mathcal{R})$ auf M induzierte Uniformität präkompakt und man erhält $\mathcal{M}_3(E,\mathcal{R})\subset\mathcal{M}_3(E,\mathcal{M}_3^{\vee}(\mathcal{R}))$.

Indem man in obigem Beweis die Rollen von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{M}_3^{\vee}(\mathcal{R})$ vertauscht erhält man, daß die durch $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{M}_3^{\vee}(\mathcal{R})$ auf $M \in \mathcal{M}_3(E,\mathcal{R})$ induzierten Uniformitäten sogar gleich sind.

Die Eigenschaft $(\mathcal{M}_3)$ wurde unter der Bezeichnung "p-determined" für lokalkonvexe Räume von BRAUNER[28] untersucht (vgl. dazu auch DAZORD, JOURLIN[34, p. 64]).

Für den Nachweis von $(\mathcal{M}.2)$ war es wesentlich, daß man "genügend viele" Mengen in $\mathcal{M}_3(E,\mathcal{R})$ zur Verfügung hatte, um von der Relativ-Topologie auf die Relativ-Uniformität zu schließen. Dies wird an folgendem Beispiel deutlich:

In $(l^2, \sigma(l^2,l^2))$ ist die Folge $(e_n; n \in \mathbb{N})$ der Einheitsvektoren beschränkt, also präkompakt. Die Topologie $\sigma(l^2,l^2)$ induziert auf $M := \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ die diskrete Topologie, denn durch $U(e_n) := \{x \in l^2; \langle e_n, x\rangle > 1/2\}$ ist eine $\sigma(l^2,l^2)$-Umgebung von e_n mit $U(e_n) \cap M = \{e_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ gegeben. Die feinste lokalkonvexe Topologie induziert auf M also ebenfalls die diskrete Topologie. In der feinsten lokalkonvexen Topologie sind aber alle beschränkten Mengen endlich dimensional, also ist M in der zugehörigen Uniformität nicht präkompakt.

<u>(d)</u> Sei $\mathcal{K} := $ TLR oder LKX und $\mathcal{M}_4(E,\mathcal{R}) := \{M \subset E;\ M$ ist $\mathcal{R}$-beschränkt$\}$. $(\mathcal{M}.1)$ ist offenbar erfüllt. Wir zeigen, daß auch $(\mathcal{M}.2)$ erfüllt ist. Sei dazu $M \in \mathcal{M}_4(E,\mathcal{R})$, o.E. M kreisförmig, $(x_n; n \in \mathbb{N})$ sei eine beliebige Folge in M und $(\varepsilon_n; n \in \mathbb{N})$, $|\varepsilon_n| \leq 1$, eine Nullfolge in $\mathbb{K}$. Da M $\mathcal{R}$-beschränkt ist, ist $(\varepsilon_n x_n; n \in \mathbb{N})$ eine $\mathcal{R}$-Nullfolge und daher wegen $\varepsilon_n x_n \in M$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\mathcal{R} \cap M = \mathcal{M}_4^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M$ auch eine $\mathcal{M}_4^{\vee}(\mathcal{R})$-Nullfolge. Daraus folgt, daß M auch $\mathcal{M}_4^{\vee}(\mathcal{R})$-beschränkt ist (KÖTHE[80, p. 156, 6 (3)]). Also gilt $M \in \mathcal{M}_4(E,\mathcal{M}_4^{\vee}(\mathcal{R}))$ und $(\mathcal{M}.2)$ ist erfüllt. Mit dem Beispiel aus (c) kann man auch hier wieder sehen, daß es für den Nachweis von $(\mathcal{M}.2)$ wesentlich war, "genügend viele" Mengen in $\mathcal{M}_4(E,\mathcal{R})$ zur Verfügung zu haben.

Die Eigenschaft $(\mathcal{M}_4)$ wurde in der Kategorie TLR von ADASCH[2] unter der Bezeichnung "lokaltopologisch" eingeführt.

<u>(14.7) Beispiele.</u> Hier geben wir eine weitere Darstellung der assoziierten Folgentopologie an, die dann unmittelbar neue Darstellungen für die assoziierte bornologische bzw. die assoziierte ultrabornologische Topologie in der Kategorie der lokalkonvexen Räume liefert.

<u>(a)</u> Mit $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei die ALEXANDROFF-Kompaktifizierung von

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ bezeichnet. $\mathcal{M}_5(E,\mathcal{R}) := \{M \subset E;$ Es gibt eine stetige Surjektion $x: \overline{\mathbb{N}} \longrightarrow (M, \mathcal{R} \cap M)\}$. $(\mathcal{M}.1)$ ist offenbar erfüllt. Sei $M \in \mathcal{M}_5(E,\mathcal{R})$ und $x: \overline{\mathbb{N}} \longrightarrow (M, \mathcal{R} \cap M)$ eine zugehörige stetige Surjektion. Dann gilt $\mathcal{R} \cap M = \mathcal{M}_5^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M$, also ist auch $x: \overline{\mathbb{N}} \longrightarrow (M, \mathcal{M}_5^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M)$ eine stetige Surjektion, d.h. $M \in \mathcal{M}_5(E, \mathcal{M}_5^{\vee}(\mathcal{R}))$. Damit ist auch $(\mathcal{M}.2)$ erfüllt. Da $\mathcal{R} \cap M$ für alle $M \in \mathcal{M}_5(E,\mathcal{R})$ kompakt und metrisierbar ist, gilt wieder $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \cap M = \mathcal{R} \cap M$ für alle $M \in \mathcal{M}_5(E,\mathcal{R})$, also auch $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_5^{\vee}(\mathcal{R})$. Die umgekehrte Inklusion zeigt man wie in (14.6a). Es gilt daher $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_5^{\vee}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_5^{\wedge}(\mathcal{R})$.

Der Einfachheit halber formulieren wir die beiden folgenden Beispiele nur für lokalkonvexe Räume.

<u>(b)</u> $\mathcal{M}_6(E,\mathcal{R}) := \{M \subset E;$ Es gibt einen normierten Raum $(F, \|\cdot\|)$, eine stetige lineare Abbildung $T: (F, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ und eine Nullfolge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in $(F, \|\cdot\|)$ mit $T(\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) = M\}$.

Offenbar ist $(\mathcal{M}.1)$ erfüllt. Zum Nachweis von $(\mathcal{M}.2)$ sei $T: (F, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ linear und stetig und $(y_n; n \in \mathbb{N})$ irgendeine Nullfolge in $(F, \|\cdot\|)$. Dann gilt $M' := T(\{y_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) \in \mathcal{M}_6(E,\mathcal{R})$ und mit $\mathcal{R} \cap M = \mathcal{M}_6^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M$ $(M \in \mathcal{M}_6(E,\mathcal{R}))$ folgt, daß $(T(y_n); n \in \mathbb{N})$ auch eine Nullfolge in $(E, \mathcal{M}_6^{\vee}(\mathcal{R}))$ ist. Daher ist auch $T: (F, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \mathcal{M}_6^{\vee}(\mathcal{R}))$ stetig und man erhält $M \in \mathcal{M}_6(E, \mathcal{M}_6^{\vee}(\mathcal{R}))$ für alle $M \in \mathcal{M}_6(E,\mathcal{R})$.

Mit $T: (F, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ ist auch $T: (F, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \mathcal{B}(\mathcal{R}))$ stetig, wobei $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ die assoziierte bornologische Topologie zu $\mathcal{R}$ ist (vgl. (10.17)). Daher ist $\mathcal{B}(\mathcal{R}) \cap M$ kompakt für alle $M \in \mathcal{M}_6(E,\mathcal{R})$. Mit $\mathcal{B}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{R}$ und der Separiertheit von $\mathcal{R}$ folgt daher $\mathcal{B}(\mathcal{R}) \cap M = \mathcal{R} \cap M$ für alle $M \in \mathcal{M}_6(E,\mathcal{R})$, also gilt $\mathcal{B}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_6^{\vee}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_6^{\wedge}(\mathcal{R})$.

Für die Inklusion $\mathcal{M}_6^{\vee}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{R})$ genügt es die MACKEY-Folgen-Stetigkeit der Abbildung $id_E: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (E, \mathcal{M}_6^{\vee}(\mathcal{R}))$ zu zeigen (KÖTHE[80, p. 384 (4), p. 386 (3)]). Dies folgt aber unmittelbar aus $\mathcal{R} \cap M = \mathcal{M}_6^{\vee}(\mathcal{R}) \cap M$ $(M \in \mathcal{M}_6(E,\mathcal{R}))$. Man erhält also $\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_6^{\vee}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_6^{\wedge}(\mathcal{R})$.

<u>(c)</u> $\mathcal{M}_7(E,\mathcal{R}) := \{M \subset E;$ Es gibt eine BANACH-Raum $(F, \|\cdot\|)$, eine stetige lineare Abbildung $T: (F, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \mathcal{R})$ und eine Nullfolge $(x_n; n \in \mathbb{N})$ in $(F, \|\cdot\|)$ mit $T(\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) = M\}$.

Indem man den Beweis zu (b) geringfügig modifiziert, erhält man $\mathcal{UB}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_7^{\vee}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_7^{\wedge}(\mathcal{R})$, wobei $\mathcal{UB}(\mathcal{R})$ die zu $\mathcal{R}$ in LKX assoziierte ultrabornologische Topologie ist.

Satz (14.5) liefert hier die bekannten Inklusionen $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{UB}(\mathcal{R})$ und mit Lemma (3.9) sieht man auch unmittelbar, daß jeder MACKEY-Folgen-vollständige bornologische lokalkonvexe Raum ultrabornologisch ist.

Im letzten Beispiel wollen wir zeigen, daß sich die von BUCHWALTER[30, p. 28] eingeführte assoziierte KELLEY-Topologie hier einordnet. Gleichzeitig liefert dieses Beispiel einen weiteren Satz vom ORLICZ-PETTIS-Typ für topologische lineare Räume.

<u>(14.8) Beispiel.</u> Sei $\mathcal{K}$ = TLR oder LKX.

$\mathcal{K}e(E,\mathcal{R}) := \{M \subset E;\ M$ absolutkonvex, $\mathcal{R} \cap M$ kompakt$\}$. Man sieht leicht, daß $(\mathcal{M}.1)$ und $(\mathcal{M}.2)$ erfüllt sind. Aus BUCHWALTER[30, p. 29, Th. 3.4.1] folgt direkt, daß die Klasse der separierten lokalkonvexen Räume mit der Eigenschaft $(\mathcal{K}e)$ mit der Klasse der lokalkonvexen KELLEY-Räume zusammenfällt.

Offenbar gilt $\mathcal{C}(E,\mathcal{R}) \subset \mathcal{K}e(E,\mathcal{R})$ (mit $\mathcal{C}(E,\mathcal{R})$ aus (8.1)) für jeden separierten topologischen linearen Raum $(E,\mathcal{R})$. Aus (14.5) und (8.4a) folgt daher:

<u>(14.9) Satz.</u> Für jeden separierten topologischen linearen (bzw. lokalkonvexen) Raum $(E,\mathcal{R})$ gilt $\mathcal{K}e(\mathcal{R}) \subset BM\mathcal{OP}(\mathcal{R})$, wobei $\mathcal{K}e(\mathcal{R})$ $(:= \mathcal{K}e^{\vee}(\mathcal{R}) = \mathcal{K}e^{\wedge}(\mathcal{R}))$ die in der jeweiligen Kategorie zu $\mathcal{R}$ assoziierte KELLEY-Topologie bezeichnet.

§ 15 Einige Gegenbeispiele und ein Übersichtsschema.

In diesem letzten Paragraphen wollen wir einige Aussagen des Typs $\mathcal{OP} \nsubseteq \mathcal{Z}$, $\mathrm{BM}\mathcal{OP} \neq \mathcal{Z}$ etc. zusammenstellen, wobei $\mathcal{Z}$ eine funktorielle Topologie in der Kategorie LKX der lokalkonvexen Räume ist.

(15.1) Beispiel.
Für $(E,\mathcal{R}) := (l^\infty, \sigma(l^\infty, l^1))$ gilt $\mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \subsetneqq \mathcal{UB}(\mathcal{R})$.

Bew.: Da $(l^1, \|\cdot\|_1)$ tonneliert ist, haben die Topologien $\sigma(l^\infty, l^1)$ und $\beta(l^\infty, l^1) = \|\cdot\|_\infty$-Topologie die gleichen beschränkten Mengen (HORVÁTH[65, p. 212, Corollary]). Die assoziierte bornologische Topologie $\mathcal{B}(\sigma(l^\infty, l^1))$ ist daher feiner als die $\|\cdot\|_\infty$-Topologie auf l^∞. Da die $\|\cdot\|_\infty$-Topologie jedoch als BANACH-Raum-Topologie bereits ultrabornologisch ist, gilt $\mathcal{UB}(\sigma(l^\infty, l^1)) = \mathcal{B}(\sigma(l^\infty, l^1)) = \|\cdot\|_\infty$-Topologie.
Andererseits gilt nach (7.15) $\mathrm{BM}\mathcal{OP}(\sigma(l^\infty, l^1)) = \mathcal{OP}(\sigma(l^\infty, l^1)) = \tau(l^\infty, l^1)$. ./.

(15.2) Beispiel.
Für $(E,\mathcal{R}) := (l^2, \sigma(l^2, l^2))$ gilt $\mathcal{He}(\mathcal{R}) \subsetneqq \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R})$, wobei $\mathcal{He}(\mathcal{R})$ die assoziierte KELLEY-Topologie nach (14.8) ist.

Bew.: Da $(E,\mathcal{R})$ quasi-vollständig ist, folgt aus (7.10) und (7.13b) $\mathrm{BM}\mathcal{OP}(\sigma(l^2, l^2)) = \mathcal{OP}(\sigma(l^2, l^2)) = \tau(l^2, l^2) = \|\cdot\|_2$-Topologie.
Andererseits stimmt $\tau(l^2, l^2)$ auf der $\sigma(l^2, l^2)$-kompakten Einheitskugel von $(l^2, \|\cdot\|_2)$ nicht mit $\sigma(l^2, l^2)$ überein. Also muß wegen (14.8) $\mathcal{He}(\sigma(l^2, l^2)) \subsetneqq \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\sigma(l^2, l^2))$ gelten. ./.

In den nächsten Beispielen wollen wir zeigen, daß die assoziierte OP-Topologie $\mathcal{OP}(\mathcal{R})$ und die assoziierte tonnelierte Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ (vgl. (10.13)) i.a. unvergleichbar sind. Diese Beispiele liefern jedoch gleichzeitig weitergehende Aussagen, zu deren Formulierung wir die folgenden Begriffe benötigen.

Die Klasse $\mathrm{Fix}(\beta) = \mathrm{Fix}(\mathcal{T})$ der tonnelierten lokalkonvexen Räume ist nach (10.4) abgeschlossen gegenüber der Bildung lokalkonvexer Finaltopologien. Ebenso ist die Klasse $\mathrm{Fix}(\mathcal{B})$ der bornologischen lokalkonvexen Räume nach (10.17) abgeschlossen gegenüber der Bildung lokalkonvexer Finaltopologien. Damit ist auch der Durchschnitt $\mathrm{Fix}(\mathcal{B}) \cap \mathrm{Fix}(\mathcal{T})$ dieser beiden Klassen gegenüber der Bildung lokalkonvexer Finaltopologien abgeschlossen. Die gemäß (10.6) zu dieser Klasse gehörige idempotente funktorielle Topologie in LKX bezeichnen wir mit $\mathcal{BT}$.

<u>(15.3) Definition.</u> Für jeden lokalkonvexen Raum $(E,\mathcal{R})$ sei

$\mathcal{BT}(\mathcal{R}) := \bigwedge^{lkx.} \{\mathcal{T}; \mathcal{T}$ ist eine bornologische tonnelierte lokalkonvexe Topologie auf E mit $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}\}$.

$\mathcal{BT}(\mathcal{R})$ heißt die zu $\mathcal{R}$ assoziierte bornologische tonnelierte Topologie.

Unmittelbar aus der Definition entnimmt man, daß für jeden separierten lokalkonvexen Raum $(E,\mathcal{R})$ die Inklusionen $\mathcal{B}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{BT}(\mathcal{R})$ und $\mathcal{T}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{BT}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{UB}(\mathcal{R})$ gelten.

Aus De WILDE, HOUET[35, p. 257] übernehmen wir die folgenden Begriffe.

<u>(15.4)</u> Die Klassen $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3 \subset \mathrm{Ob(LKX)}$ seien wie folgt definiert:

$\mathcal{L}_1 := \{(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Ob(LKX)}$; Jeder bornivore Durchschnitt einer Folge abgeschlossener absolutkonvexer $\sigma(E,E')$-Nullumgebungen ist eine $\mathcal{R}$-Nullumgebung$\}$.

$\mathcal{L}_2 := \{(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Ob(LKX)}$; Jeder bornivore Durchschnitt einer Folge abgeschlossener absolutkonvexer $\mathcal{R}$-Nullumgebungen ist eine $\mathcal{R}$-Nullumgebung$\}$.

$\mathcal{L}_3 := \{(E,\mathcal{R}) \in \mathrm{Ob(LKX)}$; Jeder absorbante Durchschnitt einer Folge abgeschlossener absolutkonvexer $\mathcal{R}$-Nullumgebungen ist eine $\mathcal{R}$-Nullumgebung$\}$.

Indem man den Beweis zu Proposition 4 aus HORVÁTH[65, p. 214] geringfügig modifiziert, erhält man, daß die Klassen $\mathcal{L}_i$ $(i=1,2,3)$ gegenüber der Bildung lokalkonvexer Finaltopologien abgeschlossen sind.

<u>(15.4a)</u> Die Räume aus $\mathcal{L}_1$ nennen wir schwach-abzählbar-quasitonneliert. Die gemäß (10.6) zu $\mathcal{L}_1$ gehörige idempotente funktorielle Topologie in LKX bezeichnen wir mit $\mathcal{SAQT}$ ("assoziierte schwach-abzählbar-quasitonnelierte Topologie").

<u>(15.4b)</u> Die Räume aus $\mathcal{L}_2$ nennen wir abzählbar-quasitonneliert. Die gemäß (10.6) zu $\mathcal{L}_2$ gehörige idempotente funktorielle Topologie in LKX bezeichnen wir mit $\mathcal{AQT}$ ("assoziierte abzählbar-quasitonnelierte Topologie").

<u>(15.4c)</u> Die Räume aus $\mathcal{L}_3$ nennen wir abzählbar-tonneliert. Die gemäß (10.6) zu $\mathcal{L}_3$ gehörige idempotente funktorielle Topologie in LKX bezeichnen wir mit $\mathcal{AT}$ ("assoziierte abzählbar-tonnelierte Topologie").

Mit $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$, (10.6) und (10.2b) erhält man unmittelbar für jeden lokalkonvexen Raum $(E,\mathcal{R})$ die Inklusionen $\mathcal{R} \subset S\mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{T}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{T}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}\mathcal{T}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{R})$ und $\mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{T}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Q}\mathcal{T}(\mathcal{R})$, wobei $\mathcal{Q}\mathcal{T}(\mathcal{R})$ die assoziierte quasitonnelierte Topologie, d.h. $\mathcal{Q}\mathcal{T} = \widehat{\beta^*}$ nach (10.12) ist.

Die oben eingeführten Abschwächungen des Begriffes "tonneliert" finden ihre Existenzberechtigung unter anderem darin, daß für solche Räume gewisse abgeschwächte Formen des Satzes von BANACH-STEINHAUS gelten. Sei etwa $(E,\mathcal{R})$ abzählbar-tonneliert, $(F,\mathcal{F})$ lokalkonvex und $T_n: (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{F})$ eine Folge stetiger linearer Abbildungen. Ist dann $(T_n; n\in\mathbb{N})$ punktweise beschränkt (d.h. $\{T_n(x); n\in\mathbb{N}\}$ ist beschränkt in $(F,\mathcal{F})$ für jedes $x\in E$), so ist $(T_n; n\in\mathbb{N})$ bereits gleichgradig stetig. Dies beweist man wie Theorem 2 aus BOURBAKI[27, p. 27].

Wir kommen nun zu den angekündigten Beispielen.

<u>(15.5) Beispiel.</u>
$(E_1,\mathcal{R}_1) := (m_o, \|\cdot\|_\infty)$ ist nach GROTHENDIECK[59, p. 145, ex. 8] tonneliert und als metrisierbarer lokalkonvexer Raum auch bornologisch. Also gilt $\mathcal{B}\mathcal{T}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_1$.
Andererseits gilt nach (7.14) $\mathcal{O}\mathcal{P}(\mathcal{R}_1) = BM\mathcal{O}\mathcal{P}(\mathcal{R}_1) = \tau(E_1,E_1^*)$.
Man hat also $\mathcal{B}\mathcal{T}(\mathcal{R}_1) \subsetneq \mathcal{O}\mathcal{P}(\mathcal{R}_1) = BM\mathcal{O}\mathcal{P}(\mathcal{R}_1)$.

<u>(15.6) Beispiel.</u>
Sei $(E_2,\mathcal{R}_2) := (l^\infty, \sigma(l^\infty,l^1))$. Wir setzen $F := (E_2, S\mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{T}(\mathcal{R}_2))'$.
Dann gilt $F \supset l^1$. Sei e_n der n-te Einheitsvektor in l^1. Wegen $F \supset l^1$ ist dann $U_n := \{x\in l^\infty;\ |\langle e_n,x\rangle| \leq 1\}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ eine abgeschlossene $\sigma(l^\infty,F)$-Nullumgebung. Daher ist $U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ eine $S\mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{T}(\mathcal{R}_2)$-Nullumgebung, die mit der $\|\cdot\|_\infty$-Einheitskugel in l^∞ übereinstimmt. Da die $\|\cdot\|_\infty$-Topologie auf l^∞ als BANACH-Raum-Topologie ultrabornologisch ist, erhält man also $S\mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{T}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{T}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{Q}\mathcal{T}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{A}\mathcal{T}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{T}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{B}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{B}\mathcal{T}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{U}\mathcal{B}(\mathcal{R}_2) = \|\cdot\|_\infty$-Topologie.
$\sigma(l^\infty,l^1) = \mathcal{R}_2$ und die $\|\cdot\|_\infty$-Topologie auf l^∞ haben die gleichen beschränkten Mengen. Die $\|\cdot\|_\infty$-Einheitskugel ist also auch eine bornivore Tonne in $(E_2,\mathcal{R}_2)$ und damit eine $\beta^*(l^\infty,l^1)$-Nullumgebung. Man erhält also auch noch $\beta^*(l^\infty,l^1) = \|\cdot\|_\infty$-Topologie.
Andererseits gilt nach (7.13b) $\mathcal{O}\mathcal{P}(\mathcal{R}_2) = \tau(l^\infty,l^1) = BM\mathcal{O}\mathcal{P}(\mathcal{R}_2)$.
Man hat also in diesem Beispiel $S\mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{T}(\mathcal{R}_2) \supsetneq BM\mathcal{O}\mathcal{P}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{O}\mathcal{P}(\mathcal{R}_2)$ und $\beta^*(l^\infty,l^1) \supsetneq BM\mathcal{O}\mathcal{P}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{O}\mathcal{P}(\mathcal{R}_2)$.

(15.7) Beispiel.

Setzt man $(E,\mathcal{R}) := (E_1,\mathcal{R}_1)\times(E_2,\mathcal{R}_2)$ mit $(E_1,\mathcal{R}_1)$ aus (15.5) und $(E_2,\mathcal{R}_2)$ aus (15.6), so erhält man mit den oben bewiesenen Relationen und (10.1) wie in Beispiel (10.22) simultan ein Beispiel für

$$\begin{aligned}
\mathcal{OP}(\mathcal{R}) &\nsubseteq \mathcal{SAQT}(\mathcal{R}) \nsubseteq \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}),\\
\mathcal{OP}(\mathcal{R}) &\nsubseteq \mathcal{AQT}(\mathcal{R}) \nsubseteq \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}),\\
\mathcal{OP}(\mathcal{R}) &\nsubseteq \mathcal{AT}(\mathcal{R}) \nsubseteq \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}),\\
\mathcal{OP}(\mathcal{R}) &\nsubseteq \mathcal{BT}(\mathcal{R}) \nsubseteq \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}),\\
\mathcal{OP}(\mathcal{R}) &\nsubseteq \mathcal{B}(\mathcal{R}) \nsubseteq \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}),\\
\mathcal{OP}(\mathcal{R}) &\nsubseteq \mathcal{T}(\mathcal{R}) \nsubseteq \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}).
\end{aligned}$$

(15.8) Beispiel.

$(E_3,\mathcal{R}_3) := (\mathbb{R}^{(I)}, \sigma(\mathbb{R}^{(I)},\mathbb{R}^{(I)}))$, wobei I eine unendliche Indexmenge ist. In (4.10b,c) war $\sigma(E_3,E_3') = \beta^*(E_3,E_3') \subsetneqq \delta(E_3,E_3')$ gezeigt worden. Also gilt insbesondere $\beta^*(E_3,E_3') \subsetneqq \mathcal{OP}(\mathcal{R}_3)$ nach (4.5a). Mit $\beta^*(l^\infty,l^1) \supsetneqq \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\sigma(l^\infty,l^1)) = \delta(l^\infty,l^1) = \mathcal{OP}(\sigma(l^\infty,l^1))$ erhält man daher in $(E,\mathcal{R}) := (E_2,\mathcal{R}_2)\times(E_3,\mathcal{R}_3)$ mit $(E_2,\mathcal{R}_2)$ aus (15.6) simultan ein Beispiel für

$$\beta^*(E,E') \nsubseteq \mathcal{OP}(\mathcal{R}),\quad \beta^*(E,E') \nsubseteq \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}) \text{ und } \beta^*(E,E') \nsubseteq \delta(E,E').$$

(15.9) Beispiel.

Da $(E_1,\mathcal{R}_1)$ aus (15.5) tonneliert ist, gilt $\beta(E_1,E_1') = \mathcal{R}_1 \subsetneqq \mathcal{OP}(\mathcal{R}_1) = \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}_1)$. Mit $(E_2,\mathcal{R}_2)$ aus (15.6) und $\beta(l^\infty,l^1) \supset \beta^*(l^\infty,l^1) \supsetneqq \mathcal{OP}(\mathcal{R}_2) = \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}_2)$ erhält man in $(E,\mathcal{R}) := (E_1,\mathcal{R}_1)\times(E_2,\mathcal{R}_2)$ auch ein Beispiel für $\beta(E,E') \nsubseteq \mathcal{OP}(\mathcal{R})$ und $\beta(E,E') \nsubseteq \mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R})$.

(15.10) Beispiel.

Sei $(F,\|\cdot\|)$ ein nicht reflexiver BANACH-Raum, der ein GROTHENDIECK-Raum ist (vgl. DIESTEL, FAIRES[39, p. 256]). Dann stimmen in F' die $\sigma(F',F)$-konvergenten Folgen und die $\sigma(F',F'')$-konvergenten Folgen überein. Also gilt $\mathcal{F}(\sigma(F',F)) \supset \sigma(F',F'')$. Andererseits stimmt $\sigma(F',F'')$ auf der $\sigma(F',F)$-kompakten Einheitskugel von $(F',\|\cdot\|)$ nicht mit $\sigma(F',F'')$ überein. Also gilt $\mathcal{F}(\sigma(F',F)) \nsubseteq \mathcal{K}e(\sigma(F',F))$. Im Raum $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \sigma(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})},\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}))$ sind alle kompakten absolutkonvexen Teilmengen endlich dimensional (vgl. (4.10a)), also gilt $\mathcal{K}e(\sigma(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})},\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})) = \tau(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})},\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}) \supsetneqq \mathcal{F}(\sigma(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})},\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}))$ (vgl. (4.10d)). Für das Produkt $(E,\mathcal{R})$ von $(F',\sigma(F',F))$ und $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})},\sigma(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})},\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}))$ gilt daher $\mathcal{K}e(\mathcal{R}) \nsubseteq \mathcal{F}(\mathcal{R})$.

Zum Abschluß stellen wir die betrachteten funktoriellen Topologien in einem Übersichtsschema zusammen.

Erklärung der im Übersichtsschema verwendeten Symbole.

$\mathcal{UB}$ = assoziierte ultrabornologische Topologie, (12.1).

$\mathcal{BT}$ = assoziierte bornologische tonnelierte Topologie, (15.3).

BM$\mathcal{OP}$ = assoziierte BM$\mathcal{OP}$-Topologie, (7.2).

$\mathcal{T}$ = assoziierte tonnelierte Topologie, (10.13).

$\mathcal{B}$ = assoziierte bornologische Topologie, (10.17).

$\mathcal{OP}$ = assoziierte $\mathcal{OP}$-Topologie, (7.1).

$\mathcal{K}e$ = assoziierte KELLEY-Topologie, (14.8).

$\mathcal{F}$ = assoziierte Folgen-Topologie, § 11.

$\mathcal{D}$ = assoziierte strikte MACKEY-Topologie, (10.14).

β = starke Topologie, $\beta(E,F)$ = Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen $\sigma(F,E)$-beschränkten Teilmengen von F.

$\mathcal{QT}$ = $\widehat{\beta^*}$ = assoziierte quasitonnelierte Topologie, (10.12).

$\mathcal{AT}$ = assoziierte abzählbar-tonnelierte Topologie, (15.4c).

$\mathcal{C}p$ = $\mathcal{M}^{\vee}_2 = \mathcal{M}^{\wedge}_2$ = assoziierte kompaktologische Topologie, (14.6b).

$\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ = Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Elementen von $\mathfrak{M}$ aus Satz (4.3); siehe auch (10.16).

β^* $\beta^*(E,F)$ = Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen $\beta(F,E)$-beschränkten Teilmengen von F.

$\mathcal{AQT}$ = assoziierte abzählbar-quasitonnelierte Topologie, (15.4b).

$\mathcal{P}$ = $\mathcal{M}^{\vee}_3 = \mathcal{M}^{\wedge}_3$ = assoziierte präkompaktologische Topologie, (14.6c

δ $\delta(E,F)$ = Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen $\sigma(F,E)$-kompakten Teilmengen von F, (4.8).

$\mathcal{Lt}$ = $\mathcal{M}^{\vee}_4 = \mathcal{M}^{\wedge}_4$ = assoziierte lokaltopologische Topologie, (14.6d).

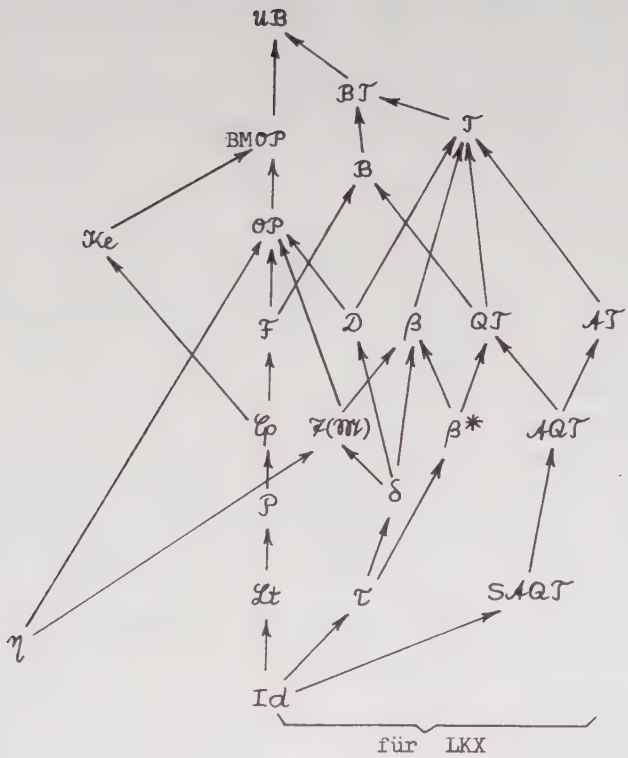
τ $\tau(E,F)$ = Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen absolutkonvexen $\sigma(F,E)$-kompakten Teilmengen von F.

$S\mathcal{AQT}$ = assoziierte schwach-abzählbar-quasitonnelierte Topologie, (15.4a).

η = assoziierte polare Topologie vom abzählbaren Typ, (5.7).

Id = Identität in $\mathcal{K}$, $\mathrm{Id}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

Übersichtsschema.



In diesem Schema weisen die Pfeile stets von der gröberen zu der feineren Topologie. Die Kette

$$\mathrm{Id} \longrightarrow \tau \longrightarrow \beta^* \longrightarrow QJ$$

ist z.B. so zu lesen: Für jeden separierten lokalkonvexen Raum $(E,\mathcal{R})$ gilt

$$\mathcal{R} < \tau(E,(E,\mathcal{R})') \subset \beta^*(E,(E,\mathcal{R})') \subset QJ(\mathcal{R}).$$

Die rechte Seite des Schemas bezieht sich auf separierte lokalkonvexe Räume. Im übrigen Teil des Schemas liegt Vergleichbarkeit vor, sofern die Bildungen definiert sind. So gilt z.B. $OP(\mathcal{R}) \subset UB(\mathcal{R})$ auch für separierte kommutative topologische Gruppen $(E,\mathcal{R})$, während $Ke(\mathcal{R})$, $BMOP(\mathcal{R})$ und $Lt(\mathcal{R})$ nur für separierte topologische lineare Räume und für separierte lokalkonvexe Räume $(E,\mathcal{R})$ definiert sind.

Liste der verwendeten Symbole.

Die auf p. 124 aufgeführten Symbole für die funktoriellen Topologien werden hier nicht nochmals angegeben.

$\exists$ "es existiert".
$\forall$ "für alle".
$\Longrightarrow$ logische Implikation.
$\Longleftrightarrow$ logische Äquivalenz.

$\complement J$ = Komplement von J.
$I \setminus K = I \cap \complement K$.
$\mathcal{K}$ Symbol für eine der drei Kategorien KTG, TLR, LKX.
KTG = Kategorie der kommutativen topologischen Gruppen.
TLR = Kategorie der topologischen linearen Räume.
LKX = Kategorie der lokalkonvexen Räume.
$Ob(\mathcal{K})$ = Objektklasse von $\mathcal{K}$.
$Mor(X,Y)$ = Menge der $\mathcal{K}$-Morphismen von X in Y für $X, Y \in Ob(\mathcal{K})$.
$\mathcal{T} \overset{\mathcal{K}}{\wedge} \mathcal{Z}$ = in der Kategorie $\mathcal{K}$ gebildetes Infimum der $\mathcal{K}$-Topologien $\mathcal{T}, \mathcal{Z}$ (HORVÁTH[65, p. 74, p. 157])
$\overset{\mathcal{K}}{\bigwedge} \mathfrak{M}$ = in der Kategorie $\mathcal{K}$ gebildetes Infimum einer Menge $\mathfrak{M}$ von $\mathcal{K}$-Topologien auf E.
$\mathcal{T} \vee \mathcal{Z}$ = Supremum der beiden Topologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{Z}$.
$\bigvee \mathfrak{M}$ = Supremum einer Menge $\mathfrak{M}$ von Topologien $\mathcal{T}$ auf E (HORVÁTH[65, p. 73]).
$\prod_{\iota \in I}$ = Mengenprodukt.
$\coprod_{\iota \in I}$ = direkte Summe (Für lineare Räume, bzw. für lokalkonvexe Räume findet man dies bei HORVÁTH[65, p. 158]. Für kommutative (topologische) Gruppen ist die direkte Summe analog definiert.)
$card(M)$ = Kardinalität einer Menge M.
$\delta_{\iota\kappa}$ = KRONECKER-Symbol, $\delta_{\iota\kappa} = 0$ für $\iota \neq \kappa$, $\delta_{\iota\kappa} = 1$ für $\iota = \kappa$.
$id_E : E \longrightarrow E$, identische Abbildung.
$T \mid M$ Einschränkung der Abbildung T auf M.
χ_L = charakteristische Funktion der Menge L.
$\mathcal{F}(I) := \{\sigma \subset I; \sigma$ endlich$\}$. $\mathcal{F}(I)$ ist per Inklusion gerichtet.
$Pot(I)$ = Potenzmenge von I.
p-Halbnorm, siehe WAELBROECK[133, p. 3].
q = Quasinorm, siehe p. 26 und p. 51,
bzw. Pseudo-Halbnorm (= $\mathcal{F}$-semi-norm bei WAELBROECK[133, p. 1])

$\overline{A} = \overline{A}^{\mathcal{T}}$ = Abschluß einer Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$.

$\mathring{A}$ = offener Kern einer Teilmenge A eines topologischen Raumes.

$\mathcal{T} \cap F$ = durch $\mathcal{T}$ auf F induzierte Relativtopologie.

$\mathcal{F}(A)$ = Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf A.

$\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ = Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Elementen aus $\mathfrak{M}$.

$\mathcal{F}_p$ = Topologie der punktweisen Konvergenz.

$(X, \mathfrak{U})$ = Menge X mit Uniformität $\mathfrak{U}$.

$\mathfrak{U} \cap Y$ = durch $\mathfrak{U}$ auf $Y \subset X$ induzierte Relativuniformität.

$U[F]$ = Anwendung der Nachbarschaft $U \subset X \times X$ auf $F \subset X$, $U[F] := \{x \in X;\ \exists\ y \in F$ mit $(y,x) \in U\}$.

$\$[x]$, $\$$ siehe p. 2

$\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$.

$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$.

$\mathfrak{f}_n := \{k \in \mathbb{N};\ k \leq n\}$, p. 20.

$\beta(\mathbb{N})$ = STONE-ČECH-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$.

$\mathbb{R}$ = reelle Zahlen.

$\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R};\ r > 0\}$.

$\mathbb{C}$ = komplexe Zahlen.

$\mathbb{Q}$ = rationale Zahlen.

$\mathbb{Z}$ = ganze Zahlen.

$\mathbb{K}$ = Grundkörper, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\mathrm{Re}(z)$ = Realteil von $z \in \mathbb{C}$

$\mathrm{Im}(z)$ = Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$; $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$.

$\mathrm{sgn}(u)$ = Signum von $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sgn}(u) = 1$ für $u > 0$, $\mathrm{sgn}(u) = 0$ für $u = 0$, $\mathrm{sgn}(u) = -1$ für $u < 0$.

$\mathrm{carr}(f) = \{\iota \in I;\ f(\iota) \neq 0\}$ für $f: I \longrightarrow \mathbb{K}$.

$\mathbb{K}^I := \{f: I \longrightarrow \mathbb{K}\}$.

$\mathbb{K}^{(I)} := \{f: I \longrightarrow \mathbb{K},\ \mathrm{carr}(f)$ endlich$\}$.

$\mathbb{K}^{\underline{I}} := \{f: I \longrightarrow \mathbb{K},\ \mathrm{carr}(f)$ abzählbar$\}$.

$\{0,1\}^I$, $\{0,1\}^{(I)}$ siehe p. 2.

$U_0(\sigma)$ = Nullumgebung in $\{0,1\}^I$ zum Parameter σ, p. 2.

$U_J(\sigma)$ = Umgebung von $J \subset I$ in $\{0,1\}^I$ zum Parameter σ, p. 3

$W_\tau(\sigma')$ = Umgebung zu $\tau \in \mathcal{F}(I)$ in $\{0,1\}^{(I)}$ zum Parameter σ'.

$(E, \mathcal{R})$ = linearer Raum (bzw. kommutative Gruppe) E mit linearer Topologie (bzw. Gruppentopologie) $\mathcal{R}$.

$T^{-1}(\mathcal{F})$ = Initialtopologie auf E bezüglich $T: E \longrightarrow (F,\mathcal{F})$.

$\prod_{\iota\in I} \mathcal{R}_\iota$ = Produkttopologie auf $\prod_{\iota\in I} E_\iota$ für die Familie $((E_\iota,\mathcal{R}_\iota);\iota\in I)$

$\coprod_{\iota\in I} \mathcal{R}_\iota$ = Summentopologie auf $\coprod_{\iota\in I} E_\iota$ für die Familie $((E_\iota,\mathcal{R}_\iota);\iota\in I)$

$\prod_{\iota\in I}(X_\iota,d_\iota)$ = Produkt der halbmetrischen Räume (X_ι,d_ι) $(\iota\in I)$, versehen mit der Produkttopologie.

$L(E_{\mathcal{R}},F_{\mathcal{T}}) := \{T:(E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{T}),\ T$ linear und stetig$\}$.

$(\tilde{E},\tilde{\mathcal{T}}) = (\widetilde{E,\mathcal{T}})$ = Vervollständigung der kommutativen separierten topologischen Gruppe $(E,\mathcal{T})$.

$(E,\|\cdot\|)$ = linearer Raum E mit der durch die Norm $\|\cdot\|$ induzierten Topologie.

$C(A)$ = konvexe Hülle von A.

$\Gamma(A)$ = absolutkonvexe Hülle von A.

$[B]$ = linearer Spann von B.

p_B = Eichfunktional zu der absolutkonvexen Menge B (HORVÁTH[65, p. 94]).

$E \dotplus F$ = (innere) algebraisch direkte Summe der linearen Teilräume E, F eines linearen Raumes G.

$\dim(L)$ = algebraische Dimension des linearen Raumes L.

$\mathcal{U}_0(E)$, $\mathcal{U}_0(E,\mathcal{T})$, $\mathcal{U}_0(\mathcal{T})$ = Nullumgebungsfilter in $(E,\mathcal{T})$.

$\mathcal{U}_0(E,\mathcal{T}) \cap F$ = durch $\mathcal{U}_0(E,\mathcal{T})$ auf $F \subset E$ induzierte Spur.

$\langle E,F\rangle$ = duales Paar (HORVÁTH[65, p. 183]).

E^* = algebraisches Dual des linearen Raumes E.

T^t = transponierte Abbildung zu T (HORVÁTH[65, p. 254]).

T^* = algebraisch transponierte Abbildung zu $T: E \longrightarrow F$, transponierte Abbildung bezüglich $\langle E,E^*\rangle$, $\langle F,F^*\rangle$.

$\sigma(E,F)$ = schwache Topologie zu einem dualen Paar $\langle E,F\rangle$.

$\eta(E,F)$ siehe p. 54

$E' = (E,\mathcal{T})'$ = topologisches Dual eines topologischen linearen Raumes $(E,\mathcal{T})$.

$E'' = (E',\beta(E',E))'$.

$E^{\#} = (E,\mathcal{OP}(\mathcal{R}))'$ = OP-Dual von $(E,\mathcal{R})$, p. 68.

$E^{\#} = (E,\mathrm{BM}\mathcal{OP}(\mathcal{R}))'$ = BMOP-Dual von $(E,\mathcal{R})$, p. 89.

$\sigma(E,E')$ = schwache Topologie zu einem topologischen linearen Raum $(E,\mathcal{T})$ mit Dual $E' := (E,\mathcal{T})'$.

M^0 = Polare von $M \subset E$ bezüglich eines dualen Paares $\langle E,F\rangle$ (HORVÁTH[65, p. 190]).

$m_0(I)$ siehe p. 13.

$m_0 := m_0(\mathbb{N})$.

$c_o(I)$ siehe p. 13.

$c_o := c_o(\mathbb{N})$.

$l^p(I)$ siehe p. 13.

$l^p := l^p(\mathbb{N})$.

$l^\infty(I)$ siehe p. 13.

$l^\infty := l^\infty(\mathbb{N})$.

$\|\cdot\|_p$ p-Norm, $\|x\|_p := (\sum_{i\in I} |x_i|^p)^{1/p}$ für $p \in [1,\infty)$,

$\|x\|_p := (\sum_{i\in I} |x_i|^p)$ für $p \in (0,1)$.

$\|\cdot\|_\infty$ = Supremums-Norm.

$C(K) := \{f: K \longrightarrow \mathbb{K},\ f \text{ stetig}\}$, wobei K ein (kompakter) topologischer Raum ist.

$C_b(X) := \{f: X \longrightarrow \mathbb{K},\ f$ stetig und beschränkt$\}$, wobei X ein topologischer Raum ist.

$\mathcal{K}(E,\mathcal{R})$ siehe p. 73.

$\mathcal{C}(E,\mathcal{R})$ siehe p. 73.

$(\mathcal{M})$ siehe p. 111.

$\mathcal{M}^\vee, \mathcal{M}^\wedge$ siehe p. 112.

$\hat{\mathcal{Z}}$ siehe p. 93.

$\mathrm{Fix}(\mathcal{Z})$ siehe p. 92.

$\tilde{\mathcal{R}}$ siehe p. 94.

$(F\text{-}\Sigma)$ siehe p. 101.

$\mathcal{H}(\Omega,(E,\mathcal{R}))$ siehe p. 108.

$z \vee y$ siehe p. 82.

$K(x,r) = \{y \in E;\ \|y-x\| < r\}$ im normierten Raum $(E,\|\cdot\|)$.

$K[x,r] = \{y \in E;\ \|y-x\| \leq r\}$ im normierten Raum $(E,\|\cdot\|)$.

$b(\mathcal{R})$ siehe (10.20) auf p. 97.

$b^*(\mathcal{R})$ siehe (10.19) auf p. 97.

Literaturverzeichnis

[1] ADASCH, N.
Der Graphensatz in topologischen Vektorräumen
Math. Z., 119 (1971), pp. 131 - 142

[2] ADASCH, N.
Über lokaltopologische Vektorräume
Proc. Symp. Funct. Analysis, Istambul 1973, pp. 51 - 56

[3] ADASCH, N., ERNST, B.
Lokaltopologische Vektorräume
Collectanea Math., 25 (1974), pp. 255 - 274

[4] ANDERSEN, N.J.M., CHRISTENSEN, J.P.R.
Some results on Borel structures with applications to subseries convergence in abelian topological groups
Israel J. Math., 15 (1973), pp. 414 - 420

[5] McARTHUR, C.W.
On relationships amongst certain spaces of sequences in an arbitrary Banach space
Can. J. Math., 8 (1956), pp. 192 - 197

[6] McARTHUR, C.W.
A note on subseries convergence
Proc. AMS, 12 (1961), pp. 540 - 545

[7] McARTHUR, C.W.
On a theorem of Orlicz and Pettis
Pacific J. Math, 22 (1967), pp. 297 - 302

[8] McARTHUR, C.W.
A convergence criterion with applications to series in locally convex spaces
Duke Math. J., 34 (1967), pp. 193 - 199

[9] McARTHUR, C.W., RETHERFORD, J.R.
Some applications of an inequality in locally convex spaces
Trans. AMS, 137 (1969), pp. 115 - 123

[10] BANACH, S.
Théorie des opérations linéaires
Chelsea publishing Comp., New York

[11] BATT, J.
Integraldarstellungen linearer Transformationen und schwache Kompaktheit
Math. Annalen, 174 (1967), pp. 291 - 304

[12] BATT, J.
Applications of the Orlicz - Pettis theorem to operator-valued measures and compact and weakly compact transformations on the space of continuous functions
Rev. Roum. Math. pures et appl., 14 (1969), pp. 907 - 935

[13] BATT, J.
Nonlinear compact mappings and their adjoints
Math. Annalen, 189 (1970), pp. 5 - 25

[14] BATT, J.
Die Verallgemeinerungen des Darstellungssatzes von F. Riesz und ihre Anwendungen
Jber. Deutsch. Math. - Verein., 74 (1973), pp. 147 - 181

[15] BATT, J.
Nonlinear integral operators on $C(S,E)$
Studia Math., 48 (1973), pp. 145 - 177

[16] BATT, J., DIEROLF, P., VOIGT, J.
Summable sequences and topological properties of $m_o(I)$
Preprint 1975

[17] BENNETT, G., KALTON, N.J.
FK - spaces containing c_o
Duke Math. J., 39 (1972), pp. 561 - 582

[18] BENNETT, G., KALTON, N.J.
Addendum to "FK - spaces containing c_o"
Duke Math. J., 39 (1972), pp. 819 - 821

[19] BESSAGA, C., PEŁCZYŃSKI, A.
On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces
Studia Math., 17 (1958), pp. 151 - 164

[20] BOCHNAK, J., SICIAK, J.
Analytic functions in topological vector spaces
Studia Math., 39 (1971), pp. 77 - 112

[21] BOËL, J., DUHOUX, M.
Sommabilité dans les espaces localement convexes
Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 86 (1972), pp. 12 - 36

[22] BOURBAKI, N.
Topologie générale, Ch. 9
Hermann, Paris 1958

[23] BOURBAKI, N.
Topologie générale, Ch. 3, 4
Hermann, Paris 1960

[24] BOURBAKI, N.
Topologie générale, Ch. 10
Hermann, Paris 1961

[25] BOURBAKI, N.
Topologie générale, Ch. 1, 2
Hermann, Paris 1965

[26] BOURBAKI, N.
Espaces vectoriels topologiques, Ch. I et II
Hermann, Paris 1966

[27] BOURBAKI, N.
Espaces vectoriels topologiques, Ch. III, IV, V
Hermann, Paris 1967

[28] BRAUNER, K.
A class of topologically free locally convex spaces and related group Hopf algebras
Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1972

[29] BUCCHIONI, D., GOLDMAN, A.
Sur certains espaces de formes lineaires lies aux mesures vectorielles
Preprint 1975

[30] BUCHWALTER, H.
Topologies et compactologies
Publ. du Dépt. de Math. Lyon, 6 - 2 (1969)

[31] BUNGART,L.
Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas
Trans. AMS, 111 (1964), pp. 317 - 344

[32] CONWAY, J.B.
The strict topology and compactness in the space of measures II
Trans AMS, 126 (1967), pp. 474 - 486

[33] DAY, M.M.
Normed linear spaces
Springer Verlag, Berlin 1973

[34] DAZORD, J., JOURLIN, M.
Sur quelques classes d'espaces localement convexes
Publ. du Dépt. de Math. Lyon, 8 - 2 (1971), pp. 39 - 69

[35] De WILDE, M., HOUET, C.
On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces
Math. Annalen, 192 (1971), pp. 257 - 261

[36] DIEROLF, P.
A theorem of Orlicz - Pettis - type
Colloque d'analyse fonctionnelle, Mai 1975, Bordeaux

[37] DIEROLF, S.
Über assoziierte lineare und lokalkonvexe Topologien
manuscripta math., 16 (1975), pp. 27 - 46

[38] DIESTEL, J.
Applications of weak compactness and bases to vector measures and vectorial integration
Rev. Roum. Math. pures et appl., 18 (1973), pp. 211 - 224

[39] DIESTEL, J., FAIRES, B.
On vector measures
Trans. AMS, 198 (1974), pp. 253 - 271

[40] DREWNOWSKI, L.
On the Orlicz - Pettis type theorems of Kalton
Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys., 21 (1973), pp. 515 - 518

[41] DREWNOWSKI, L.
On subseries convergence in some function spaces
Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys., 22 (1974), pp. 797 - 803

[42] DREWNOWSKI, L.
Another note on Kalton's theorem
Studia Math., 52 (1975), pp. 233 - 237

[43] DREWNOWSKI, L.
An extension of a theorem of Rosenthal on operators acting from $\ell_\infty(\Gamma)$
Preprint 1975

[44] DREWNOWSKI, L., LABUDA, I.
Sur quelques théorèmes du type d'Orlicz - Pettis, II
Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys., 21 (1973), pp. 119 - 126

[45] DUDLEY, R.M.
On sequential convergence
Trans. AMS, 112 (1964), pp. 483 - 507

[46] DUDLEY, R.M.
Corrections to "On sequential convergence"
Trans. AMS, 148 (1970), pp. 623 - 624

[47] DUDLEY, R.M.
Convergence of sequences of distributions
Proc. AMS, 27 (1971), pp. 531 - 534

[48] DUGUNDJI, J.
Topology
Allyn and Bacon, Inc., Boston 1966

[49] DUNFORD, N.
Uniformity in linear spaces
Trans. AMS, 44 (1938), pp. 305 - 356

[50] DUNFORD, N., SCHWARTZ, J.T.
Linear operators, vol. I
Interscience Publ., Inc., New York 1967

[51] EBERHARDT, V.
Über einen Graphensatz für Abbildungen mit normiertem Zielraum
manuscripta math., 12 (1974), pp. 47 - 65

[52] GARLING, D.J.H.
A generalized form of inductive - limit topology for vector spaces
Proc. London Math. Soc., 14 (1964), pp. 1 - 28

[53] GARNIR, H.G., De WILDE, M., SCHMETS, J.
Analyse fonctionnelle, Tome I
Birkhäuser Verlag, Basel 1968

[54] GELFAND, I.
Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren
Mat. Sbornik, N.S., 4 (1938), pp. 235 - 284

[55] GILLMAN, L., JERISON, M.
Rings of continuous functions
Van Nostrand Reinhold Comp., New York 1960

[56] GRAUERT, H.,REMMERT, R.
Analytische Stellenalgebren
Springer Verlag, Berlin 1971

[57] GROTHENDIECK, A.
Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)
Can. J. Math., 5 (1953), pp. 129 - 173

[58] GROTHENDIECK, A.
Sur les espaces (F) et (DF)
Summa Brasil. Math., 3 (1954), pp. 57 - 123

[59] GROTHENDIECK, A.
Espaces vectoriels topologiques
Sao Paulo 1964

[60] GULICK, D., SCHMETS, J.
Separability and semi - norm separability for spaces of bounded continuous functions
Bull. Soc. Royale Sci. de Liège, 41 (1972), pp. 254 - 260

[61] HAYDON, R.
Sur un probléme de H. Buchwalter
C. R. Acad. Sc. Paris, 275 (1972), pp. 1077 - 1080

[62] HILLE, E., PHILLIPS, R.S.
Functional analysis and semi - groups
Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1957

[63] HOGBE - NLEND, H.
Théorie des bornologies et applications
Lecture Notes in Math., vol. 213
Springer Verlag, Berlin 1971

[64] HOFFMANN - JØRGENSEN, J.
Vector measures
Math. Scand., 28 (1975), pp. 5 - 32

[65] HORVÁTH, J.
Topological vector spaces and distributions, vol. I
Addison - Wesley Publ. Comp., Reading, Mass. 1966

[66] IYAHEN, S.O.
On certain classes of linear topological spaces
Proc. London Math. Soc., 18 (1968), pp. 285 - 307

[67] IYAHEN, S.O., POPOOLA, J.O.
A generalized inductive limit topology for linear spaces
Glasgow Math. J., 14 (1973), pp. 105 - 110

[68] JAMES, R.C.
Bases and reflexivity of Banach spaces
Annals of Math., 52 (1950), pp. 518 - 527

[69] JAMESON, G.J.O.
Some short proofs on subseries convergence
Amer. Math. Monthly, 79 (1972), pp. 53 - 55

[70] KALTON, N.J.
Subseries convergence in topological groups and vector spaces
Israel J. Math., 10 (1971), pp. 402 - 412

[71] KALTON, N.J.
Some forms of the closed graph theorem
Proc. Camb. Phil. Soc., 70 (1971), pp. 401 - 408

[72] KALTON, N.J.
Topologies on Riesz groups and applications to measure theory
Proc. London Math. Soc., 28 (1974), pp. 253 - 273

[73] KALTON, N.J.
Spaces of compact operators
Math. Annalen, 208 (1974), pp. 267 - 278

[74] KALTON, N.J.
Basic sequences in F - spaces and their applications
Proc. Edinburgh Math. Soc., 19 (1974), pp. 151 - 167

[75] KALTON, N.J.
Exhaustive operators and vector measures
Proc. Edinburgh Math. Soc., 19 (1975), pp. 291 - 300

[76] KELLEY, J.L.
General topology
Van Nostrand Reinhold Comp., New York 1970

[77] KELLEY, J.L., NAMIOKA, I. et al.
Linear topological spaces
Van Nostrand Comp., Princeton, New Jersey 1963

[78] KISYŃSKI, J.
Convergence du type L
Colloq. Math., 7 (1960), pp. 205 - 211

[79] KÖTHE, G.
Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume
Math. Nachrichten, 4 (1950/51), pp. 69 - 80

[80] KÖTHE, G.
Topologische lineare Räume, I
Springer Verlag, Berlin 1960

[81] KÖTHE, G.
Topological vector spaces, vol. II
Preprint 1974

[82] KŌMURA, Y.
On linear topological spaces
Kumamoto J. of Sci., 5 (1960/62), pp. 148 - 157

[83] LABUDA, I.
A generalization of Kalton's theorem
Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys.,
21 (1973), pp. 509 - 510

[84] LABUDA, I.
Sur quelques théorèmes du type d'Orlicz - Pettis, I
Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys.,
21 (1973), pp. 127 - 132

[85] LABUDA, I.
Sur quelques théorèmes du type d'Orlicz - Pettis, III
Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys.,
21 (1973), pp. 599 - 605

[86] LABUDA, I.
Denumerability conditions and Orlicz -Pettis type theorems
Ann. Soc. Math. Polon., Ser. I, Comm. Math.,
18 (1974), pp. 45 - 49

[87] LABUDA, I.
On bounded multiplier convergence of series in Orlicz spaces
Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys.,
23 (1975), pp. 651 - 655

[88] LABUDA, I.
Exhaustive measures in arbitrary topological vector spaces
Preprint 1975

[89] LAVIGNE, J.P.
Approximation des fonctions uniformément continues
J. Math. pures et appl., 51 (1972), pp. 419 - 427

[90] LIGAUD, J.P.
Sur la théorie des espaces $\mathcal{DF}$ en l'absence de locale convexité
Proc. London Math. Soc., 28 (1974), pp. 725 - 737

[91] NICULESCU, C.
Mesures et séries
Indag. Math., 34 (1972), pp. 375 - 379

[92] ORLICZ, W.
Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II
Studia Math., 1 (1929), pp. 241 - 255

[93] PEŁCZYŃSKI, A.
A connection between weakly unconditional convergence and weakly completeness of Banach spaces
Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys., 6 (1958), pp. 251 - 253

[94] PEŁCZYŃSKI, A.
Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact
Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys., 10 (1962), pp. 641 - 648

[95] PETTIS, B.J.
On integration in vector spaces
Trans. AMS, 44 (1938), pp. 277 - 304

[96] PFISTER, H.
Über eine Art von gemischter Topologie und einen Satz von A. Grothendieck über (DF) - Räume
manuscripta math., 10 (1973), pp. 273 - 287

[97] PFISTER, H.
Über die Stetigkeit von linearen Abbildungen auf Produkten von topologischen linearen Räumen
Preprint 1974

[98] PIETSCH, A.
Nukleare lokalkonvexe Räume
Akademie Verlag, Berlin 1969

[99] PORTA, H.
Compactly determined locally convex topologies
Math. Annalen, 196 (1972), pp. 91 - 100

[100] POWELL, M.H.
On Kōmura's closed graph theorem
Univ. of Maryland, Dept. of Math., TR 72 - 35, 1972

[101] RISS, J.
Analyse harmonique et familles sommables
Bull. Soc. math. France, Mémoire 31 - 32 (1972), pp 321 - 325

[102] ROBERT, A.
Quelques questions d'espaces vectoriels topologiques
Comment. Math. Helvet., 42 (1967), pp. 314 - 342

[103] ROBERTSON, A.P.
On unconditional convergence in topological vector spaces
Proc. Royal. Soc. Edinburgh, 68 (1969), p. 145 - 157

[104] ROBERTSON, A.P.
Unconditional convergence and the Vitali - Hahn - Saks theorem
Bull. Soc. math. France, Mémoire 31 - 32 (1972), pp.335 - 341

[105] ROBERTSON, W.
Completions of topological vector spaces
Proc. London Math. Soc., 8 (1958), pp. 242 - 257

[106] ROBERTSON, A.P., ROBERTSON, W.
Topologische Vektorräume
BI - Hochschultaschenbuch, Bd. 164/164a
Bibliographisches Institut, Mannheim 1967

[107] ROELCKE, W.
Topologische lineare Räume I
Vorlesungsausarbeitung, Univ. München 1968/69

[108] ROELCKE, W.
Topologische lineare Räume II
Vorlesungsausarbeitung, Univ. München 1969

[109] ROELCKE, W., LURJE, P., DIEROLF, S., EBERHARDT, V.
Einige Beispiele über Bairesche, normierte und ultrabornologische Räume
Arch. Math., 23 (1972), pp. 513 - 519

[110] ROLEWICZ, S.
Metric linear spaces
PWN, Warszawa 1972

[111] ROLEWICZ, S., RYLL - NARDZEWSKI, C.
On unconditional convergence in linear metric spaces
Colloq. Math., 7 (1967), pp. 327 - 331

[112] ROSENTHAL, H.P.
On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory
Studia Math., 37 (1970), pp. 13 - 36

[113] ROSENTHAL, H.P.
Correction to the paper "On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory" this volume pp. 13 - 36
Studia Math., 37 (1971), pp. 311 - 313

[114] SAXON, S.A.
Nuclear and product spaces, Baire - like spaces, and the strongest locally convex topology
Math. Annalen, 197 (1972), pp. 87 - 106

[115] SCHAEFER, H.H.
Topological vector spaces
The Macmillan Comp., New York 1966

[116] SCHWARTZ, L.
Un théorème de convergence dans les L^p, $0 \leq p < \infty$
C. R. Acad. Sc. Paris, 268 (1969), pp. 704 - 706

[117] SEGAL, I.E., KUNZE, R.A.
Integrals and operators
McGraw - Hill Book Comp., New York 1968

[118] STILES, W.J.
On subseries convergence in F - spaces
Israel J. Math., 8 (1970), pp. 53 - 56

[119] THOMAS, E.
Sur les mesures vectorielles à valeurs dans des espaces d'un type particulier
C. R. Acad. Sc. Paris, 266 (1968), pp. 1135 - 1137

[120] THOMAS, E.
Sur le théorème d'Orlicz et un problème de M. Laurent Schwartz
C. R. Acad. Sc. Paris, 267 (1968), pp. 7 - 10

[121] THOMAS, E.
Familles sommables dans les espaces vectoriels topologiques
Univ. de Bordeaux, Dépt. de Math., 1969 - 1970

[122] THOMAS, E.
L'intégration par rapport a une mesure de Radon vectorielle
Ann. Inst. Fourier Grenoble, 20 (1970), pp. 55 - 191

[123] THOMAS, G.E.F.
The Lebesgue - Nikodym theorem for vector valued measures
Yale Univerity, Dept. of Math. 1971

[124] THOMAS, G.E.F.
On Radon maps with values in arbitrary topological vector spaces, and their integral extensions
Yale University, Dept. of Math., 1972

[125] THORP, E.O., WHITLEY, R.J.
Operator representation theorems
Illinois J. Math., 9 (1965), pp. 595 - 601

[126] TREVES, F.
Topological vector spaces, distributions and kernels
Academic Press, New York 1967

[127] TURPIN, P.
Mesures vectorielles pathológiques
C. R. Acad. Sc. Paris, 275 (1972), pp. 981 - 984

[128] TURPIN, P.
Suites sommables dans certains espaces de fonctions mesurables
C. R. Acad. Sc. Paris, 280 (1975), pp. 349 - 352

[129] TWEDDLE, I.
Vector - valued measures
Proc. London Math. Soc., 20 (1970), pp. 469 - 489

[130] TWEDDLE, I.
Unconditional convergence and vector - valued measures
J. London Math. Soc., 2 (1970), pp. 603 - 610

[131] UHL, J.J., Jr.
Applications of a lemma of Rosenthal to vector measures and series in Banach spaces
Preprint 1974

[132] VALDIVIA, M.
A class of bornological barrelled spaces which are not ultrabornological
Math. Annalen, 194 (1971), pp. 43 - 51

[133] WAELBROECK, L.
Topological vector spaces and algebras
Lecture Notes in Mathematics, vol. 230
Springer Verlag, Berlin 1971

[134] WEBB, J.H.
Sequential convergence in locally convex spaces
Proc. Camb. Phil. Soc., 64 (1968), pp. 341 - 364

[135] WHEELER, R.F.
The strict topology for P - spaces
Proc. AMS, 41 (1973), pp. 466 - 472

Lebenslauf

Geburtsdatum: 28. I. 1942
Geburtsort: Böblingen bei Stuttgart

Schule:

1948 - 1953 Volksschule in Heidelberg
1953 - 1956 Realgymnasium in Heidelberg

Beruf:

1956 - 1959 Maschinenbauerlehre in Heidelberg
18. 4. 1959 Gesellenprüfung in Heidelberg
1. 5. 1959 - 30. 9. 1959 Praktikant in der Luft- u. Raumfahrt
1. 10. 1959 - 31. 8. 1963 Technischer Zeichner in der Luft- u. Raumfahrt
1. 9. 1963 - 30. 4. 1968 Entwicklungsingenieur im Triebwerksbau
1. 5. 1968 - 30. 4. 1970 Mathematiker am Max-Planck-Institut
1. 5. 1970 - 30. 9. 1971 Aeroelastiker im Flugzeugbau

Studium:

1959 - 1963 Maschinenbau-Studium am Oskar-von-Miller-Polytechnikum in München
17. 2. 1962 Vorprüfung am Oskar-von-Miller-Polytechnikum
19. 7. 1963 Ingenieurprüfung am Oskar-von-Miller-Polytechnikum
24. 10. 1963 Zuerkennung der allgemeinen Hochschulreife nach einer Prüfung am Kultusministerium in München
1964 - 1970 Mathematik-Studium an der Universität München
26. 1. 1967 Diplom-Vorprüfung in Mathematik an der Universität München
29. 4. 1970 Diplom-Hauptprüfung in Mathematik an der Universität München
Diplomarbeit bei Prof. Dr. B. Brosowski: Topologische Eigenschaften von Korrespondenzen

Seit 1. 10. 1971 bin ich als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen Institut der Universität München tätig.

München, im Dezember 1975